Niedersächsisches
Kultusministerium

Landtagsfassung November 2017

Kerncurriculum für
das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe
die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe
das Berufliche Gymnasium
das Abendgymnasium
das Kolleg

Mathematik

Niedersachsen

An der Weiterentwicklung des Kerncurriculums für das Unterrichtsfach Mathematik im Sekundarbereich II waren die nachstehend genannten Personen beteiligt:

Dr. Dorothee Göckel, Aurich
Alois Graelmann, Osnabrück
Ralf Hoheisel, Hannover
Ulf-Hermann Krüger, Syke
Dr. Jörg Meyer, Hameln
Sabine Meyer, Rotenburg
Thomas Sperlich, Göttingen
Hans-Dieter Stenten-Langenbach, Meppen
Carsten Wilms, Oldenburg

Wissenschaftliche Beratung:

Prof. Dr. Gilbert Greefrath, Westfälische Wilhelms Universität Münster
Prof. Dr. Jürg Kramer, Humboldt-Universität zu Berlin

Die Ergebnisse des gesetzlich vorgeschriebenen Anhörungsverfahrens sind berücksichtigt worden.

Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium (2017)
30159 Hannover, Schiffgraben 12

Druck:
Unidruck
Weidendamm 19
30167 Hannover

Das Kerncurriculum kann als PDF-Datei vom Niedersächsischen Bildungsserver (NIBIS) (http://www.cuvo.nibis.de) heruntergeladen werden.

Inhalt **Seite**

1 Bildungsbeitrag des Faches Mathematik

Die Schülerinnen und Schüler erweitern im Sekundarbereich II ihre im Sekundarbereich I erworbenen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen mit dem Ziel, sich auf die Anforderungen eines Studiums oder einer beruflichen Ausbildung vorzubereiten. Darüber hinaus ist es ihnen auf der Grundlage eines anwendungsbereiten Wissens und verfügbarer Verfahrenskenntnisse möglich, am gesellschaftlichen Leben teilzuhaben, es aktiv mit zu gestalten und weiter zu entwickeln.

Für die Vertiefung der allgemeinen Bildung, die kulturelle Basiskompetenzen, ein breites Orientierungswissen sowie eine wissenschaftspropädeutische Grundbildung einschließt, sollte der Mathematikunterricht folgende Erfahrungen ermöglichen:[1]

(1) Mathematik bietet eine Vielzahl von Modellen zur Beschreibung der Welt um uns. Dabei erweist sich Mathematik als eine weltzugewandte, nützliche Wissenschaft.

(2) Mathematik ist eine deduktiv geordnete Welt eigener Art. Indem Schülerinnen und Schüler induktiv Zusammenhänge erkunden, systematisieren, in ihnen argumentieren und begründen, orientieren sie sich in diesem Gedankengebäude. Sie erfahren dabei die mathematische Erkenntnisgewinnung als eine kulturelle Errungenschaft, die historisch gewachsen ist.

(3) Bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen werden Problemlösestrategien und -fähigkeiten erworben, die über das Fach Mathematik hinaus genutzt werden können.

(4) Mathematik leistet einen Beitrag zur Persönlichkeitsentwicklung. Mathematische Fragestellungen sind dazu geeignet, die Neugier und das Interesse zu wecken, aber auch Beharrlichkeit zu entwickeln. In der Zusammenarbeit mit Anderen wird die Kommunikations- und Kooperationsfähigkeit geschult. Mathematisches Können fördert die Entwicklung von Selbstvertrauen.

Im Wechselspiel dieser Erfahrungen entfaltet der Mathematikunterricht seine spezifische allgemeinbildende Kraft und leistet einen unverzichtbaren Beitrag zur Erfüllung des Bildungsauftrags des Sekundarbereichs II.

In der Auseinandersetzung mit anderen und in neuen, vergleichbar gestalteten Situationen entstehen mit zunehmender Abstraktion eine fachspezifische Begrifflichkeit und ein gültiges Gesamtbild von Mathematik, das den prozesshaften und den systemischen Charakter dieser Wissenschaft widerspiegelt.

Das Fach Mathematik thematisiert ggf. auch soziale, ökonomische, ökologische, politische, kulturelle und interkulturelle Phänomene, Probleme der nachhaltigen Entwicklung sowie die Vielfalt sexueller Identitäten und trägt dazu bei, wechselseitige Abhängigkeiten zu erkennen und Wertmaßstäbe für das eigene Handeln sowie ein Verständnis für gesellschaftliche Auseinandersetzungen zu entwickeln.

[1] Winter, H. (2003): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (Istron-Gruppe), Band 8, S. 6 – 15. Hildesheim: Franzbecker;
Heymann, H. W. (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim, Basel: Beltz

2 Unterrichtsgestaltung mit dem Kerncurriculum

2.1 Kompetenzerwerb im Mathematikunterricht

Die in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS Mathematik) vorgegebenen Anforderungen werden im Kerncurriculum durch die Beschreibung von erwarteten Kompetenzen konkretisiert. Die Orientierung an Kompetenzen hat zur Folge, dass der Blick auf die Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler gelenkt und das Lernen als kumulativer Prozess organisiert wird.

Aufgabe des Mathematikunterrichts im Sekundarbereich II ist es, die vorhandenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler weiter zu entwickeln, zu ergänzen und nachhaltig zu sichern. Um in wechselnden Problemsituationen flexibel verfügbar zu sein, müssen prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen gleichermaßen entwickelt werden.

Die Weiterentwicklung und der Erwerb dieser Kompetenzen müssen berücksichtigen, dass die Schülerinnen und Schüler Verantwortung für den Lernprozess und den Lernerfolg übernehmen und sowohl den Unterricht als auch das eigene Lernen aktiv selbst gestalten.

Lernsituationen, die Sachkontexte, innermathematische Zusammenhänge und offene Problemstellungen beinhalten, fördern den Kompetenzerwerb und verknüpfen prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzbereiche miteinander. Sie ermöglichen Schülerinnen und Schülern mathematische Zusammenhänge zu entdecken und Begriffe selbst zu entwickeln, an Alltags- und Vorerfahrungen anzuknüpfen und individuelle Lernwege zu beschreiten. Im Beruflichen Gymnasium muss durchgängig dem Prinzip der Handlungs- und Berufsorientierung im Mathematikunterricht Rechnung getragen werden.

Durch eine Lernkultur, in der sich die Schülerinnen und Schüler ihrer eigenen Lernwege bewusst werden, unterschiedliche Lösungen reflektieren und selbstständig Entscheidungen treffen, werden diese Kompetenzen erworben und weiterentwickelt. So wird lebenslanges Lernen angeregt und die Grundlage für motiviertes, durch Neugier und Interesse geprägtes Handeln erweitert. Fehler und Umwege werden dabei als bedeutsame Bestandteile von Erfahrungs- und Lernprozessen angesehen.

Unterschiedliche Unterrichtsformen und vielfältige Methoden unterstützen das selbstständige Lernen der Schülerinnen und Schüler ebenso wie eine Wissensvermittlung durch die Lehrkraft.

Neben dem Erwerb von Wissen muss der Unterricht auch Gelegenheiten bieten, die erworbenen Kompetenzen anzuwenden und mittels intelligenten Übens zu festigen.

Zur Rolle von Aufgaben

Wesentliche Prozesse beim Kompetenzaufbau werden durch geeignete Aufgaben gesteuert, die möglichst vielfältige Lösungsansätze zulassen, die Kreativität von Schülerinnen und Schülern anregen und darüber hinaus Kooperation und Kommunikation fördern. Dazu ist es sinnvoll, die Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler zu berücksichtigen. Das Ziel der Konstruktion von „intelligentem Wissen“ und des Erwerbs von Kompetenzen, die flexibel einsetzbar sind, erfordert eine Vielfalt von Aufgabentypen. Die unterschiedlichen Anforderungen an Aufgaben zeigen sich nicht nur bei typischen Tätigkeiten wie dem Erkunden, Systematisieren und Üben. Auch Schwerpunktsetzungen bezüglich der prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die Entwicklung von Problemlösestrategien und nicht zuletzt die Notwendigkeit der inneren Differenzierung erfordern die Bearbeitung unterschiedlicher Aufgabentypen einschließlich offener Aufgaben. Dabei muss jede Aufgabenstellung im Kontext der methodischen Umsetzung gesehen werden.

Aufgaben zum Kompetenznachweis sind auf eine möglichst objektive und differenzierte Erfassung von individuellen Leistungen ausgerichtet. Die Schülerinnen und Schüler weisen bei ihrer Bearbeitung nach, welche Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten sie besitzen und wie sie diese einsetzen, um unbekannte Probleme zu lösen. Aufgaben zum Kompetenznachweis müssen entsprechend klare und differenzierte Anforderungen stellen und dürfen sich nicht nur auf das schematische und kalkülhafte Abarbeiten von Verfahren beschränken. Diese Klarheit in den Anforderungen wird auch mithilfe der für die zentralen Prüfungsaufgaben formulierten Operatoren erreicht (siehe Anhang), die im Unterricht eingeführt und in schriftlichen Arbeiten verwendet werden. Die Aufgaben spiegeln die Vielfalt der im Unterricht erworbenen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten wider und beinhalten sowohl eingeübte Verfahren als auch variantenreich gestaltete bekannte oder abgewandelte Fragestellungen und erfassen damit prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen.

Sowohl bei Aufgaben zum Kompetenzerwerb als auch zum Kompetenznachweis sind die Anforderungsbereiche der BS Mathematik zu berücksichtigen.

Zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

Digitale Mathematikwerkzeuge können die Entwicklung mathematischer Kompetenzen unterstützen. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten.

Das Verständnis und die Beherrschung mathematischer Verfahren hängen grundsätzlich nicht vom digitalen Mathematikwerkzeug ab. Die Schülerinnen und Schüler können mathematische Verfahren generell unabhängig vom Hilfsmittel erläutern und in einfachen Fällen auch hilfsmittelfrei durchführen. Die dafür notwendigen Routinen werden durch regelmäßige Übungen und Wiederholungen gesichert. Die Schülerinnen und Schüler bauen auch ihre Fähigkeiten aus, die eingeführten digitalen Mathematikwerkzeuge sinnvoll und sicher zu nutzen. Chancen und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge bedürfen dabei einer kritischen Reflexion.

Durch den Einsatz eines Computer Algebra Systems (CAS) werden alternative Zugänge ermöglicht. Steht ein CAS nicht durchgängig zur Verfügung, so sind diese mindestens exemplarisch zu verdeutlichen.

Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt deren Einsatz in der Prüfung. Art und Leistungsumfang der digitalen Mathematikwerkzeuge, die den Schülerinnen und Schülern sowohl im Unterricht als auch bei Hausaufgaben und bei Leistungsüberprüfungen zur Verfügung stehen sollen, werden in den fachbezogenen Hinweisen zur Abiturprüfung geregelt.

Um den unterschiedlichen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit digitalen Mathematikwerkzeugen Rechnung zu tragen, wird in den prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen der Einführungsphase auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge sowie auf hilfsmittelfrei zu erwerbende Kompetenzen hingewiesen, wenn Abgrenzungen deutlich werden sollen.

2.2 Einführungs- und Qualifikationsphase

Das besondere Ziel der Einführungsphase besteht darin, für alle Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufe eine gemeinsame Basis für die Mitarbeit in der Qualifikationsphase zu schaffen. Damit hat der Unterricht folgende Aufgaben:

- in die Arbeitsweisen der Qualifikationsphase einzuführen,
- Einblicke zu gewähren in das unterschiedliche Vorgehen der Kurse auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau,
- Entscheidungshilfen zu geben bei der Kurswahl für die Qualifikationsphase,
- Kenntnisse fachlich auszudifferenzieren,
- Lücken in den prozessbezogenen und den inhaltsbezogenen Kompetenzen zu schließen, die sich z. B. durch die unterschiedlichen Bildungsgänge ergeben haben.

Die in der Einführungs- und in der Qualifikationsphase zu erwerbenden prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen sind in den Tabellen der Kapitel 3.1 und 3.2 festgelegt, wobei teilweise eine Differenzierung für verschiedene Schulformen erfolgt. Ferner werden im Kapitel 3.3 Lernbereiche dargestellt, die die Entwicklung der geforderten Kompetenzen ermöglichen.

2.3 Anforderungsbereiche und Anforderungsniveaus

Das Fach Mathematik wird in der Qualifikationsphase auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau unterrichtet. Auf grundlegendem Anforderungsniveau (gA) werden nach den in den Leitideen ausgewiesenen inhaltsbezogenen Kompetenzen Grundkenntnisse bereitgestellt. Auf erhöhtem Anforderungsniveau (eA) wird nicht nur ein größerer Umfang an mathematischen Inhalten

behandelt, sondern es ist auch ein tieferes und komplexeres Verständnis der Verfahren und Begrifflichkeiten notwendig.
Es ergeben sich auch unterschiedliche Anforderungen im Hinblick auf

- die Komplexität und den Aspektreichtum des Gegenstands,
- den Grad der Differenzierung und der Abstraktion,
- den Anspruch an die Beherrschung der Fachsprache und der Fachmethoden,
- den Grad der Selbstständigkeit,
- die Tiefe und den Grad der Präzision der Argumentation.

Unterschiedliche kognitive Ansprüche von kompetenzbezogenen mathematischen Aktivitäten werden durch drei Anforderungsbereiche[2] beschrieben.
Anforderungsbereich I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang, die Verständnissicherung sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren.
Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten, Erklären und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.
Anforderungsbereich III umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler selbstständig geeignete Arbeitstechniken und Verfahren, wenden sie auf neue Problemstellungen an und reflektieren das eigene Vorgehen.

Bezüglich der prozessbezogenen Kompetenzen werden auf beiden Anforderungsniveaus alle drei Anforderungsbereiche realisiert, wobei der Schwerpunkt zu erbringender Leistungen im Anforderungsbereich II liegt. Auf grundlegendem Niveau sind die Anforderungsbereiche I und II, auf erhöhtem Niveau die Anforderungsbereiche II und III stärker zu akzentuieren.

[2] nach: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) 3.1.1, S. 22
Zur Ausprägung der prozessbezogenen Kompetenzen in den Anforderungsbereichen siehe 3.1

2.4 Innere Differenzierung

Mit Rücksicht auf die Heterogenität der Lernenden hinsichtlich ihrer fachlichen und personalen Kompetenzen oder ihres kulturellen sowie sozialen Hintergrundes sind auch im Sekundarbereich II differenzierende Lernangebote und Lernanforderungen für den Erwerb der in diesem Kerncurriculum vorgegebenen Kompetenzen im erforderlichen Umfang bereitzustellen.

Innere Differenzierung als Unterrichtsprinzip berücksichtigt die Lernausgangslage, zielt auf die individuelle Förderung ab, entwickelt und unterstützt das selbstständige Lernen und bindet die Lernenden in die Gestaltung der Unterrichtsprozesse ein.

Binnendifferenzierende Maßnahmen können auf allen didaktischen und methodischen Ebenen durchgeführt werden, also hinsichtlich einzelner Unterrichtsziele, -inhalte, -medien und vor allem hinsichtlich der Unterrichtsorganisation. Geeignete Aufgaben zum Kompetenzerwerb berücksichtigen immer das didaktische Konzept des Unterrichtsfaches.

Eine besondere Bedeutung kommt der **Einführungsphase** zu, in der es nötig ist, die individuellen Fähigkeiten, Fertigkeiten und Neigungen im Rahmen der Ermittlung der Lernausgangslage festzustellen sowie diese produktiv in die Planung und Umsetzung des Unterrichts einzubetten, um eine langfristig erfolgreiche Arbeit im Fach Mathematik in der gymnasialen Oberstufe anzubahnen. In der **Qualifikationsphase** steht dagegen die zielgerichtete Vorbereitung auf die thematischen, fach- und kursspezifischen Anforderungen der Abiturprüfung im Vordergrund. Dabei sind die oben angesprochenen differenzierenden Maßnahmen in angemessener Vielfalt umzusetzen.

3 Erwartete Kompetenzen

Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden jeweils Leitideen zugeordnet, die nicht auf bestimmte mathematische Themenbereiche begrenzt sind.
Die im Sekundarbereich I erworbenen Kompetenzen sind unverzichtbare Grundlage für die Arbeit im Sekundarbereich II. Sie werden dort beständig gefestigt, vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein.

Prozessbezogene Kompetenzbereiche	**Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche**
• K1 Mathematisch argumentieren • K2 Probleme mathematisch lösen • K3 Mathematisch modellieren • K4 Mathematische Darstellungen verwenden • K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • K6 Kommunizieren	• L1 Algorithmus und Zahl • L2 Messen • L3 Raum und Form • L4 Funktionaler Zusammenhang • L5 Daten und Zufall

Im Kapitel 3.1 werden zunächst die prozessbezogenen Kompetenzen beschrieben und jeweils die drei Anforderungsbereiche definiert. Daran anschließend werden die in der Einführungs- und der Qualifikationsphase zu erwerbenden prozessbezogenen Kompetenzen in tabellarischer Form konkretisiert.
Im Kapitel 3.2 werden die inhaltsbezogenen Kompetenzen entsprechend dargestellt. Aufgrund der unterschiedlichen Ausprägungen sind die in der Qualifikationsphase zu erwerbenden inhaltsbezogenen Kompetenzen für das Gymnasium, die Gesamtschule, das Abendgymnasium und das Kolleg (Kapitel 3.2.2.1) und für das Berufliche Gymnasium (Kapitel 3.2.2.2) getrennt aufgeführt. Die Anordnung der Kompetenzen legt weder eine Rangfolge noch eine zeitliche Reihenfolge der unterrichtlichen Umsetzung fest.
Im Kapitel 3.3 werden Lernbereiche dargestellt, die die Entwicklung der geforderten Kompetenzen ermöglichen. Diese sind als thematische Umsetzung des Kerncurriculums zu verstehen. Den Lernbereichen sind die zu erarbeitenden mathematischen Begriffe und Verfahren zugeordnet. Im Kapitel 3.3.1 sind die Lernbereiche für die gemeinsame Einführungsphase dargestellt. Die Lernbereiche der Qualifikationsphase für das Gymnasium, die Gesamtschule, das Abendgymnasium und das Kolleg finden sich im Kapitel 3.3.2.1 und die für das Berufliche Gymnasium im Kapitel 3.3.2.2.

3.1 Prozessbezogene Kompetenzen

K1 Mathematisch argumentieren
Das Argumentieren hebt sich vom Informationsaustausch bzw. dem intuitiven Entscheiden vor allem durch Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit ab. Beim Argumentieren in außermathematischen Situationen geht es vor allem um das Rechtfertigen von Modellannahmen, das Interpretieren von Ergebnissen, das Bewerten der Gültigkeit oder der Nützlichkeit eines Modells und das Treffen von Entscheidungen mithilfe des Modells. Beim Argumentieren in innermathematischen Situationen spricht man allgemein vom Begründen und je nach Strenge auch vom Beweisen. Das Argumentieren umfasst ein breites Spektrum von Aktivitäten: vom Erkunden von Situationen, Strukturieren von Informationen, Fragen stellen, Aufstellen von Vermutungen, Angeben von Beispielen und Plausibilitätsbetrachtungen, über das schlüssige (auch mehrschrittige) Begründen bis hin zum formalen Beweisen. Hierbei kommen unterschiedliche Abstufungen zum Tragen: vom Begründen durch Verweis auf Plausibilität oder Beispiele bis zum mehrschrittigen Beweisen durch Zurückführen auf gesicherte Aussagen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Einsicht in die Notwendigkeit allgemeingültiger Begründungen von Vermutungen. Die Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge hilft beim Aufstellen von Vermutungen und verleiht diesen eine breitere Plausibilität, macht aber strengere Begründungen nicht überflüssig.
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben: Anforderungsbereich I: • Wiedergeben und Anwenden von Routineargumentationen • Angeben einfacher rechnerischer Begründungen und Ziehen einfacher logischer Schlussfolgerungen • Führen von Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen Anforderungsbereich II: • Nachvollziehen, Erläutern oder Entwickeln überschaubarer mehrschrittiger Argumentationen und logischer Schlüsse Anforderungsbereich III: • Nutzen, Erläutern oder Entwickeln von Beweisen und von anspruchsvollen Argumentationen • Bewerten verschiedener Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit

K2 Probleme mathematisch lösen
Anforderungen an Abstraktion, Folgerichtigkeit und Exaktheit bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen schulen in besonderem Maße das systematische und logische Denken sowie das kritische Urteilen. Beim selbstständigen Bearbeiten von mathematischen Problemen nutzen und reflektieren die Schülerinnen und Schüler Heurismen und festigen das Vertrauen in ihre Denkfähigkeit. Bei der Bearbeitung von Problemen erfahren Schülerinnen und Schüler, dass Anstrengungsbereitschaft und Beharrlichkeit erforderlich sind, um zu Lösungen zu gelangen. Digitale Mathematikwerkzeuge ermöglichen durch die vielfältigen und schnell zugänglichen Darstellungsformen ein experimentelles Arbeiten. Mathematische Probleme können durch Variation und Erkundung der Konsequenzen eigenständig gefunden und gelöst werden. Dabei bietet sich die Gelegenheit, über die Tauglichkeit der eingesetzten Werkzeuge zu reflektieren.
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben: Anforderungsbereich I: • Finden eines Lösungsweges zu einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung Anforderungsbereich II: • Finden eines Lösungsweges zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen Anforderungsbereich III: • Entwickeln und Anwenden einer Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems (z. B. Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung) durch Anwenden mehrerer Heurismen • Beurteilen verschiedener Lösungswege

K3 Mathematisch modellieren
Realsituationen können durch Modellierung einer mathematischen Bearbeitung zugänglich gemacht werden. Das Modellieren umfasst: Idealisieren und Vereinfachen der Realsituation, Festlegen von Annahmen, Übersetzen in mathematische Begriffe und Auswahl geeigneter mathematischer Verfahren sowie das Arbeiten in dem gewählten Modell. Der Reflexion und Beurteilung sowie ggf. der Variation des verwendeten mathematischen Modells im Hinblick auf die Realsituation kommt dabei eine besondere Bedeutung zu. Digitale Mathematikwerkzeuge erlauben die Verarbeitung umfangreicher Daten und die Untersuchung komplexer funktionaler Modelle. Die Schülerinnen und Schüler nutzen ihre Ergebnisse von Modellierungsprozessen zum Erstellen von Prognosen und als Grundlage für Entscheidungen. Aussagen und Behauptungen, die auf Modellannahmen basieren, werden kritisch betrachtet.
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben: Anforderungsbereich I: • Anwenden vertrauter und direkt erkennbarer Modelle • Überführen von einfachen Realsituationen in mathematische Modelle • Übertragen von mathematischen Resultaten auf gegebene Realsituationen Anforderungsbereich II: • Durchführen mehrschrittiger Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen • Interpretieren von Ergebnissen einer solchen Modellierung • Anpassen eines mathematischen Modells an veränderte Umstände Anforderungsbereich III: • Modellieren komplexer Realsituationen unter Festlegung von Variablen und Bedingungen • Überprüfen, Vergleichen und Bewerten mathematischer Modelle im Kontext von Realsituationen

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

Mathematisches Arbeiten erfordert das Anlegen und Interpretieren von Darstellungen und den dem Problem angemessenen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen. Zu den Darstellungsformen gehören Texte, Tabellen, Graphen, Terme und Formeln. Außerdem veranschaulichen Skizzen, Grafiken und Figuren geometrische, stochastische oder logische Zusammenhänge. Digitale Mathematikwerkzeuge unterstützen einen flexiblen Umgang mit mathematischen Darstellungen.

Der flexible Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen erleichtert das Verständnis von Sachzusammenhängen. Eigene Darstellungen dienen dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen und unterstützen die Argumentation und das Problemlösen. Insbesondere bei der Präsentation von Ergebnissen dienen Darstellungen als Kommunikationsmittel.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I:
- Anfertigen und Nutzen von Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen

Anforderungsbereich II:
- Interpretieren oder Verändern gegebener Darstellungen
- Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen

Anforderungsbereich III:
- Sachgerechtes und verständiges Umgehen mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen
- Problemadäquates Entwickeln von Darstellungen, Beurteilen verschiedener Darstellungen und Darstellungsformen und sachgerechtes Nutzen unvertrauter Darstellungen

K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Problemstellungen und Lösungen werden in der Regel in natürlicher Sprache dargestellt. Durch die Übersetzung in eine von Eindeutigkeit und Prägnanz geprägte symbolische und formale Sprache werden komplexe Sachverhalte einer mathematischen Bearbeitung zugänglich gemacht. Der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umfasst strategische Fähigkeiten und grundlegendes Regelwissen als Voraussetzung für zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen.

Die Schülerinnen und Schüler setzen Regeln und Verfahren verständig ein.
Dabei nutzen sie auch die eingeführten digitalen Mathematikwerkzeuge.
Daneben werden hilfsmittelfreie Routinen entwickelt und angewendet.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I:
- Verwenden elementarer Lösungsverfahren
- Anwenden von Formeln und Nutzen von Symbolen
- Nutzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge

Anforderungsbereich II:
- Anwenden formaler mathematischer Verfahren
- Umgang mit mathematischen Objekten im Kontext
- Gezielte Auswahl und effizienter Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge

Anforderungsbereich III:
- Durchführen komplexer Verfahren
- Bewerten verschiedener Lösungs- und Kontrollverfahren
- Reflektieren der Möglichkeiten und Grenzen von mathematischen Verfahren, Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen

K6 **Kommunizieren**
Kommunizieren über mathematische Zusammenhänge beinhaltet das Dokumentieren, das verständliche Darstellen und Präsentieren von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen. Schülerinnen und Schüler nehmen mathematische Informationen und Argumente auf, strukturieren Informationen, erläutern mathematische Sachverhalte und verständigen sich darüber mit eigenen Worten und unter Nutzung angemessener Fachbegriffe. Sie strukturieren und dokumentieren mündlich und schriftlich ihre Arbeit, Lernwege und Ergebnisse, wobei sie verschiedene mathematische Darstellungsformen sowie digitale Mathematikwerkzeuge nutzen. Zudem bieten sich durch den Einsatz von Medien neue Möglichkeiten des elektronischen Datenaustauschs. Die Schülerinnen und Schüler geben ihre Überlegungen verständlich weiter. Sie prüfen und bewerten Argumentationen. Dabei gehen sie konstruktiv mit Fehlern und Kritik um.
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben: Anforderungsbereich I: • Darlegen einfacher mathematischer Sachverhalte • Identifizieren von Informationen und Auswählen dieser aus kurzen, strukturierten Texten mit mathematischem Gehalt Anforderungsbereich II: • Verständliches Darlegen mehrschrittiger Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse • Interpretieren von Äußerungen anderer Personen zu mathematischen Aussagen und Identifizieren mathematischer Informationen in Texten Anforderungsbereich III: • Kohärentes und vollständiges Darlegen einer komplexen mathematischen Lösung oder Argumentation • Strukturieren, Interpretieren, Analysieren und Bewerten mathematischer Fachtexte und Äußerungen mit mathematischem Gehalt

3.1.1 Prozessbezogene Kompetenzen für die Einführungsphase

K1	**Mathematisch argumentieren**

Die Schülerinnen und Schüler …

- erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache.
- kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren.
- erkennen in Sachsituationen kausale Zusammenhänge, geben Begründungen an, überprüfen und bewerten diese.

K2	**Probleme mathematisch lösen**

Die Schülerinnen und Schüler …

- beschaffen zu inner- und außermathematischen Problemen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen.
- wählen geeignete heuristische Strategien wie Zerlegen in Teilprobleme, Spezialisieren und Verallgemeinern, Systematisieren und Strukturieren zum Problemlösen aus und wenden diese an.
- nutzen digitale Mathematikwerkzeuge beim Problemlösen zielgerichtet, auch zur Unterstützung beim systematischen Probieren.
- reflektieren ihre Vorgehensweise.

K3	**Mathematisch modellieren**

Die Schülerinnen und Schüler …

- wählen, variieren und verknüpfen Modelle zur Beschreibung von Anwendungssituationen.
- analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Anwendungssituationen.
- erkennen funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen, beschreiben diese und nutzen die globalen und lokalen Eigenschaften bestimmter Funktionen sowie die Variation von Parametern zur Modellierung.

K4	**Mathematische Darstellungen verwenden**

Die Schülerinnen und Schüler …

- nutzen Tabellen und Grafiken zur Darstellung von Verteilungen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
- nutzen Tabellen, Graphen und Terme zur Darstellung von Funktionen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
- identifizieren und klassifizieren Funktionen, die in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen dargestellt sind.
- wechseln zwischen den Darstellungsformen.

K5	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen

Die Schülerinnen und Schüler …

- verwenden mathematische Symbole und Schreibweisen sachgerecht.
- nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
- verwenden digitale Mathematikwerkzeuge zur Darstellung und Auswertung von Daten, auch das Regressionsmodul.
- nutzen Termumformungen zum Lösen von Gleichungen.
- wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.

K6	Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler …

- teilen ihre Überlegungen unter Verwendung der Fachsprache anderen verständlich mit.
- präsentieren Problembearbeitungen unter Verwendung geeigneter Medien.
- gehen auf Überlegungen anderer zu mathematischen Inhalten ein und überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit.
- organisieren, beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter.
- erfassen, interpretieren und reflektieren Texte mit mathematischen Inhalten.

3.1.2 Prozessbezogene Kompetenzen für die Qualifikationsphase

<table>
<tr><th colspan="2">K1 Mathematisch argumentieren</th></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• erläutern in inner- und außermathematischen Situationen Strukturen und Zusammenhänge und stellen darüber Vermutungen an.
• begründen oder widerlegen Aussagen in angemessener Fachsprache mit mathematischen Mitteln und reflektieren die Vorgehensweise.
• reflektieren und bewerten Argumentationen und Begründungen auf Schlüssigkeit und Angemessenheit.
• vertreten eigene Problemlösungen und Modellierungen.</td></tr>
<tr><td></td><td>• vergleichen und bewerten verschiedene Begründungen für einen mathematischen Sachverhalt.
• reflektieren Beweisverfahren.
• variieren Situationen, stellen Vermutungen an und untersuchen diese.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">K2 Probleme mathematisch lösen</th></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• identifizieren in inner- und außermathematischen Situationen mathematische Probleme, formulieren diese mit eigenen Worten und in mathematischer Fachsprache.
• wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese an.
• überprüfen die Plausibilität der Ergebnisse.
• beschreiben, vergleichen und bewerten Lösungswege.
• reflektieren und bewerten die benutzten Strategien.</td></tr>
<tr><td></td><td>• variieren vorgegebene mathematische Probleme und untersuchen die Auswirkungen auf die Problemlösung.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">K3 Mathematisch modellieren</th></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
vereinfachen durch Abstrahieren und Idealisieren Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen und reflektieren die Vereinfachungsschritte.
beschreiben Realsituationen durch mathematische Modelle wie z. B. durch Funktionen, Zufallsversuche, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Matrizen (Berufliches Gymnasium Gesundheit und Soziales, Berufliches Gymnasium Wirtschaft), Koordinaten und Vektoren.
schränken Definitionsbereiche gemäß der Modellierung sinnvoll ein.
führen Berechnungen im Modell durch.
interpretieren Ergebnisse aus Modellrechnungen in der Realsituation und modifizieren ggf. das Modell.
reflektieren die Grenzen von Modellen und der mathematischen Beschreibung von Realsituationen.
ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Realsituationen zu und reflektieren so die Universalität von Modellen.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">K4 Mathematische Darstellungen verwenden</th></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
verwenden verschiedene Darstellungsformen von Funktionen und wechseln zwischen diesen.
verwenden geometrische und vektorielle Darstellungsformen für geometrische Gebilde und wechseln zwischen diesen.
verwenden Matrizen und Diagramme zur Darstellung von Prozessen und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen (Berufliches Gymnasium Gesundheit und Soziales, Berufliches Gymnasium Wirtschaft).
stellen Zufallsexperimente auf verschiedene Weise dar und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten.</td></tr>
<tr><td>begründen ihre Auswahl von Darstellungen.</td><td>begründen ihre Auswahl von Darstellungen und reflektieren allgemeine Vor- und Nachteile sowie die Grenzen unterschiedlicher Darstellungsweisen.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen</th></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• verwenden mathematische Symbole zum Strukturieren von Informationen, zum Modellieren und zum Problemlösen.
• reflektieren deren Verwendung und übersetzen zwischen symbolischer und natürlicher Sprache.
• arbeiten mit Funktionstermen, mit Gleichungen und Gleichungssystemen sowie mit Vektoren und Matrizen.
• setzen digitale Mathematikwerkzeuge sinnvoll zur Analyse unbekannter Funktionen ein.
• setzen digitale Mathematikwerkzeuge in allen Themenfeldern als sinnvolles Werkzeug zum Lösen mathematischer Probleme ein.
• belegen ihr Grundverständnis für mathematische Verfahren, indem sie diese auch ohne digitale Mathematikwerkzeuge in überschaubaren Situationen ausführen.
• nutzen eine handelsübliche Formelsammlung.</td></tr>
<tr><td></td><td>• kennen algorithmische Verfahren und können sie anhand von Beispielen erläutern.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">K6 Kommunizieren</th></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• erfassen, interpretieren und reflektieren mathematikhaltige authentische Texte.
• erläutern eigene Problembearbeitungen und Einsichten sowie mathematische Zusammenhänge mit eigenen Worten und unter Verwendung geeigneter Fachsprache.
• dokumentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse auch im Hinblick auf den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und stellen jene verständlich dar.
• präsentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Medien.
• verstehen Überlegungen anderer zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein.</td></tr>
<tr><td></td><td>• verwenden Fachtexte bei der selbstständigen Arbeit an mathematischen Problemen.</td></tr>
</table>

3.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen

Die sich aus den Funktionen des Sekundarbereichs I und der Einführungsphase ergebenden Funktionsklassen sind Gegenstand der Qualifikationsphase und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein.

3.2.1 Inhaltsbezogene Kompetenzen für die Einführungsphase

L1 Leitidee: Algorithmus und Zahl

Die Schüler und Schülerinnen …

- lösen Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen mithilfe der aus dem Sekundarbereich I bekannten Verfahren.
- lösen lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
- wenden die Summen-, Faktor- und Potenzregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
- ermitteln Extrem- und Wendepunkte.
- nutzen Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei der Bestimmung von Ableitungen.

L2 Leitidee: Messen

Die Schüler und Schülerinnen …

- bestimmen arithmetisches Mittel, Modalwert, Median, empirische Varianz, empirische Standardabweichung s_n und Spannweite für verschiedene Häufigkeitsverteilungen auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
- bestimmen Sekanten- und Tangentensteigungen sowie die mittlere und lokale Änderungsrate.

L4 Leitidee: Funktionaler Zusammenhang

Schwerpunkt elementare Funktionslehre

Die Schüler und Schülerinnen …

- erkennen in Anwendungssituationen funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen bzw. Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie.
- beschreiben Symmetrie und Globalverhalten von Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- führen Parametervariationen für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und $y = a \cdot f\left(b \cdot (x - c)\right) + d$ auch mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen durch, beschreiben und begründen die Auswirkungen auf den Graphen und verallgemeinern dieses unter Bezug auf die Funktionen des Sekundarbereichs I.
- beschreiben die Eigenschaften von ausgewählten Wurzelfunktionen als Eigenschaften spezieller Potenzfunktionen.
- grenzen Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen gegeneinander ab und nutzen sie zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge.
- deuten die Graphen von ganzrationalen Funktionen als Überlagerung von Graphen von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten.
- bestimmen Nullstellen ganzrationaler Funktionen und beschreiben deren Zusammenhang mit der

faktorisierten Termdarstellung.

- beschreiben das Globalverhalten ganzrationaler Funktionen anhand deren Termdarstellung.
- begründen mögliche Symmetrien des Graphen ganzrationaler Funktionen zur y-Achse und zum Ursprung.
- wenden ganzrationale Funktionen zur Beschreibung von Sachsituationen an.

Schwerpunkt Ableitungen

Die Schüler und Schülerinnen …

- beschreiben und interpretieren mittlere Änderungsraten und Sekantensteigungen in funktionalen Zusammenhängen, die als Tabelle, Graph oder Term dargestellt sind, und erläutern sie an Beispielen.
- beschreiben und interpretieren mithilfe eines propädeutischen Grenzwertbegriffs die Entwicklung der lokalen Änderungsrate aus mittleren Änderungsraten.
- beschreiben und interpretieren mithilfe eines propädeutischen Grenzwertbegriffs die Entwicklung der Tangentensteigung aus Sekantensteigungen.
- beschreiben und interpretieren die Ableitung als lokale Änderungsrate sowie als Tangentensteigung und erläutern diesen Zusammenhang an Beispielen.
- bestimmen die Gleichungen von Tangenten und Normalen.
- beschreiben den Zusammenhang zwischen lokalen Änderungsraten einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion.
- entwickeln Graph und Ableitungsgraph auseinander, beschreiben und begründen Zusammenhänge und interpretieren diese in Sachzusammenhängen.
- beschreiben und begründen Zusammenhänge zwischen Graph und Ableitungsgraph auch unter Verwendung der Begriffe Monotonie, Extrem- und Wendepunkt.
- begründen notwendige und hinreichende Kriterien für lokale Extrem- und für Wendestellen anschaulich aus der Betrachtung der Graphen zur Ausgangsfunktion und zu den Ableitungsfunktionen.
- geben die Ableitungsfunktion von Funktionen f mit $f(x)=x^n;\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sin(x)$ und $f(x)=\cos(x)$ an.
- begründen anschaulich die Summen- und die Faktorregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen.
- lösen mit der Ableitung Sachprobleme.

L5	**Leitidee: Daten und Zufall**

Die Schüler und Schülerinnen …

- planen exemplarisch eine Datenerhebung und beurteilen vorgelegte Datenerhebungen, auch unter Berücksichtigung der Repräsentativität der Stichprobe.
- stellen Häufigkeitsverteilungen in Säulendiagrammen dar und interpretieren solche Darstellungen.
- charakterisieren und interpretieren Datenmaterial mithilfe der Kenngrößen Stichprobenumfang n, arithmetisches Mittel, Modalwert, Median, empirische Varianz, empirische Standardabweichung s_n und Spannweite.
- unterscheiden Lagemaße sowie Streumaße bezüglich ihrer Aussagekraft.
- beschreiben den Einfluss der Klassenbreite auf die Interpretation des Datenmaterials.
- vergleichen verschiedene Häufigkeitsverteilungen mithilfe der eingeführten Kenngrößen und Darstellungen.

3.2.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen für die Qualifikationsphase

3.2.2.1 Inhaltsbezogene Kompetenzen für die Qualifikationsphase für Gymnasium, Gesamtschule, Abendgymnasium und Kolleg

<table>
<tr><th colspan="2">L1 Leitidee: Algorithmus und Zahl</th></tr>
<tr><td colspan="2">Mathematische Verfahren können in Form von Algorithmen systematisiert und damit auch einer Rechnernutzung zugänglich gemacht werden. Diese Algorithmen produzieren unter geeigneten Bedingungen verlässliche Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein Verständnis für den Ablauf, die Ergebnisdarstellung sowie die Bedingungen und Grenzen der verwendeten Algorithmen.
Die Arbeit mit digitalen Mathematikwerkzeugen macht ein grundlegendes Verständnis für die Idee des Algorithmus notwendig und fördert dieses zugleich.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen Grenzwerte bei der Bestimmung von Ableitungen und Integralen.
• lösen lineare Gleichungssysteme mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
• lösen Exponentialgleichungen.</td></tr>
<tr><td>• wenden Produktregel und Kettenregel bei linearer innerer Funktion zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
• erläutern ein algorithmisierbares Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen und wenden es an.</td><td>• wenden Produktregel und Kettenregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
• erläutern den Gauß-Algorithmus als ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme und wenden ihn an.
• überprüfen die Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen für Wachstumsmodelle durch Einsetzen in die Differentialgleichung.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">L2 Leitidee: Messen</th></tr>
<tr><td colspan="2">Das Bestimmen und Deuten von Größen aus dem Sekundarbereich I wird um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden erweitert. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Stochastische Kenngrößen lassen sich ebenfalls als Ergebnisse von Messprozessen auffassen.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• bestimmen Streckenlängen in Ebene und Raum auch mithilfe des Skalarproduktes.
• überprüfen die Orthogonalität zweier Vektoren.
• bestimmen Flächen- und Rauminhalte von geradlinig und ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten.
• berechnen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für einfache diskrete Verteilungen.
• berechnen Erwartungswert und Standardabweichung für die Binomialverteilung.
• beurteilen, ob ein Spiel fair ist.
• berechnen Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand.
• bestimmen Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind.
• berechnen bestimmte Integrale, auch mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td>• berechnen Winkelgrößen zwischen Vektoren sowie zwischen Strecken und Geraden.</td><td>• bestimmen Winkelgrößen in Ebene und Raum auch mithilfe des Skalarprodukts.
• erläutern und nutzen Verfahren zur Berechnung von Abständen von Punkten, Geraden und Ebenen.
• bestimmen uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten.
• bestimmen Volumen von Körpern, die durch Rotation von Graphen um die x-Achse entstehen.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">L3 Leitidee: Raum und Form</th></tr>
<tr><td colspan="2">Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen die Beschreibung und Untersuchung einfacher geometrischer Objekte und ihrer Lagebeziehungen im Raum. Die erarbeiteten Werkzeuge werden zur Modellierung von Realsituationen verwendet.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern.
• wenden die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren an und veranschaulichen sie geometrisch.
• überprüfen zwei Vektoren auf Kollinearität.
• wenden Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten an.
• beschreiben Geraden und Ebenen durch Gleichungen in Parameterform.
• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und bestimmen Schnittpunkte.
• deuten das Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion.</td></tr>
<tr><td></td><td>• beschreiben Ebenen durch Gleichungen in Normalen- und Koordinatenform.
• wechseln zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von Ebenen.
• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen sowie von Ebenen und lösen Schnittprobleme.
• beschreiben die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen etwa der Form $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und berechnen damit Punktkoordinaten für Schrägbilder.</td></tr>
</table>

L4 Leitidee: Funktionaler Zusammenhang

Funktionen eignen sich zur Modellierung einer Vielzahl von Realsituationen. Mit den Mitteln der Differential- und Integralrechnung werden zum einen Veränderungen beschrieben und analysiert, zum anderen Bestände rekonstruiert. Die vertiefende Behandlung von funktionalen Zusammenhängen auch unter Nutzung der Ableitungsfunktionen und der Entwicklung der Integralrechnung hat zum Ziel, unterschiedliche Typen mathematischer Probleme bearbeiten zu können und einen Zugang zu neuen Vertretern bekannter Funktionstypen zu gewinnen.

Stochastische Situationen werden durch den funktionalen Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeiten beschrieben.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler …

- deuten das bestimmte Integral als aus Änderungen rekonstruierter Bestand und als Flächeninhalt.
- beschreiben das Integral als Grenzwert von Produktsummen.
- deuten bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang.
- geben Stammfunktionen für die Funktionen f mit $f(x)=x^n;\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin(x)$ und $f(x)=\cos(x)$ an.
- entwickeln Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel.
- überprüfen Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln.
- begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch anschaulich.
- beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeit beim exponentiellen Wachstum als proportional zum Bestand.
- charakterisieren die Basis e durch $(e^x)'=e^x$.
- verwenden die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x)=e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x)=a^x$.
- beschreiben das asymptotische Verhalten des begrenzten Wachstums.
- beschreiben stochastische Situationen durch Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
- beschreiben Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen tabellarisch und grafisch.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
	• verwenden die ln-Funktion als eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x};\ x>0$.
	• interpretieren Integralfunktionen auch als Bestands- und Flächeninhaltsfunktion.
	• unterscheiden Integral- und Stammfunktion.
	• interpretieren und bestimmen uneigentliche Integrale als Grenzwerte.
	• begründen die Volumenformel für Körper, die durch Rotation von Graphen um die x-Achse entstehen und wenden diese an.
	• klassifizieren Funktionen nach bestimmten globalen Eigenschaften.
	• nutzen bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten Funktionsterms.
• bestimmen ausgehend von vorgegebenen	• übersetzen vorgegebene lokale Eigen-

Eigenschaften in Sachkontexten und von lokalen und globalen Eigenschaften des Graphen einer ganzrationalen Funktion deren Funktionsterm. • führen für ganzrationale Funktionen die Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durch.	schaften des Graphen in Bedingungen an den Funktionsterm und ermitteln diesen. • nutzen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen. • benennen und begründen Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Scharparameter. • beschreiben begrenztes und logistisches Wachstum, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen. • vergleichen die bereits bekannten Wachstumsmodelle und das des logistischen Wachstums untereinander.
• beschreiben Verknüpfungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen in einfachen Fällen, untersuchen diese, wenden sie in Sachsituationen an und führen Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durch. • beschreiben Verkettungen der e-Funktion mit linearen Funktionen, untersuchen diese, wenden sie in Sachsituationen an und führen Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durch.	• beschreiben und untersuchen Verkettungen und Verknüpfungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Sachsituationen. • beschreiben das asymptotische Verhalten bei additiver Verknüpfung der e-Funktion mit linearen Funktionen. • ermitteln Scharparameter, auch zur Angleichung an Daten. • führen die Variation des Scharparameters zur Anpassung an vorgegebene Eigenschaften durch. • beschreiben Wachstumsmodelle mithilfe der zugehörigen Differentialgleichungen und überprüfen mögliche Lösungsfunktionen.

L5 Leitidee: Daten und Zufall	
Bekannte Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von Häufigkeitsverteilungen statistischer Daten werden mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in zufallsabhängigen Situationen vernetzt. Durch Verfahren und Begriffe der Stochastik kann man zu kontrollierbaren Urteilen in realen Entscheidungssituationen gelangen. Die eingeführte Technologie bietet die Möglichkeit, umfangreiches Datenmaterial zu bearbeiten und zu analysieren.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
Die Schülerinnen und Schüler … • beschreiben Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und lösen damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. • untersuchen Teilvorgänge in mehrstufigen Zufallsexperimenten auf stochastische Unabhängigkeit. • erläutern die Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen. • stellen den Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung her.	

• berechnen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. • verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen. • erläutern und verwenden die Binomialverteilung sowie Binomialkoeffizienten. • charakterisieren Wahrscheinlichkeitsverteilungen anhand der Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung und nutzen diese bei der Binomialverteilung für Interpretationen. • ermitteln Prognoseintervalle für Stichproben im Kontext der Binomialverteilung. • ermitteln, ob ein vermuteter Wert für den Parameter p der Binomialverteilung mit einer vorliegenden Stichprobe verträglich ist.	
	• stellen den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingter Wahrscheinlichkeit her. • unterscheiden zwischen kausaler und stochastischer Unabhängigkeit. • begründen die Binomialverteilung als Näherungslösung für weitere stochastische Situationen. • unterscheiden zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen sowie zwischen Säulendiagrammen und Histogrammen. • nutzen den Erwartungswert und die Standardabweichung einer normalverteilten Zufallsgröße für Interpretationen. • beurteilen die Approximierbarkeit der Binomialverteilung durch die Normalverteilung. • berechnen Prognoseintervalle für eine binomialverteilte Zufallsgröße mithilfe der Approximation durch die Normalverteilung. • berechnen Konfidenzintervalle für den Parameter p und zu einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße mithilfe der Approximation durch die Normalverteilung. • verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen, die sich annähernd durch die Normalverteilung beschreiben lassen.

3.2.2.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen für die Qualifikationsphase für das Berufliche Gymnasium

Einige inhaltsbezogene Kompetenzen der Qualifikationsphase werden nach den Fachrichtungen des Beruflichen Gymnasiums durch entsprechende Kennzeichnungen unterschieden. Sofern keine Kennzeichnung vorhanden ist, gelten die Ausführungen für alle Fachrichtungen.
Folgende Abkürzungen werden verwendet:

BG GuS: Berufliches Gymnasium Gesundheit und Soziales
BG T: Berufliches Gymnasium Technik
BG W: Berufliches Gymnasium Wirtschaft

<table>
<tr><th colspan="2">L1 Leitidee: Algorithmus und Zahl</th></tr>
<tr><td colspan="2">Mathematische Verfahren können in Form von Algorithmen systematisiert und damit auch einer Rechnernutzung zugänglich gemacht werden. Diese Algorithmen produzieren unter geeigneten Bedingungen verlässliche Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein Verständnis für den Ablauf, die Ergebnisdarstellung sowie die Bedingungen und Grenzen der verwendeten Algorithmen.
Die Arbeit mit digitalen Mathematikwerkzeugen macht ein grundlegendes Verständnis für die Idee des Algorithmus notwendig und fördert dieses zugleich.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen Grenzwerte bei der Bestimmung von Ableitungen und Integralen.
• lösen lineare Gleichungssysteme mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
• lösen Exponentialgleichungen.
• nutzen Matrizenaddition und -multiplikation sowie inverse Matrizen zur Beschreibung ökonomischer Prozesse (BG GuS, BG W).</td></tr>
<tr><td>• wenden Produktregel und Kettenregel bei linearer innerer Funktion zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
• erläutern ein algorithmisierbares Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen und wenden es an.</td><td>• wenden Produktregel und Kettenregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an.
• erläutern den Gauß-Algorithmus als ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme und wenden ihn an.
• überprüfen die Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen für Wachstumsmodelle durch Einsetzen in die Differentialgleichung.
• nutzen Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen (BG GuS, BG W).
• interpretieren Grenzmatrizen und Fixvektoren (BG GuS, BG W).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">L2 Leitidee: Messen</th></tr>
<tr><td colspan="2">Das Bestimmen und Deuten von Größen aus dem Sekundarbereich I wird um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden erweitert. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Stochastische Kenngrößen lassen sich ebenfalls als Ergebnisse von Messprozessen auffassen.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• bestimmen Streckenlängen in Ebene und Raum auch mithilfe des Skalarproduktes.
• überprüfen die Orthogonalität zweier Vektoren.
• bestimmen Flächen- und Rauminhalte von geradlinig und ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten auch mithilfe des Vektorprodukts (BG T).
• berechnen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für einfache diskrete Verteilungen.
• berechnen Erwartungswert und Standardabweichung für die Binomialverteilung.
• beurteilen ökonomische Prozesse mithilfe des Erwartungswertes.
• berechnen Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand.
• bestimmen Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind.
• berechnen bestimmte Integrale, auch mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.</td></tr>
<tr><td>• berechnen Winkelgrößen zwischen Vektoren sowie zwischen Strecken und Geraden.</td><td>• bestimmen Winkelgrößen in Ebene und Raum auch mithilfe des Skalarprodukts.
• erläutern und nutzen Verfahren zur Berechnung von Abständen von Punkten, Geraden und Ebenen (BG T).
• bestimmen uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten.
• bestimmen Volumen von Körpern, die durch Rotation von Graphen um die x-Achse entstehen.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">L3 Leitidee: Raum und Form</th></tr>
<tr><td colspan="2">Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen die Beschreibung und Untersuchung einfacher geometrischer Objekte und ihrer Lagebeziehungen im Raum. Die erarbeiteten Werkzeuge werden zur Modellierung von Realsituationen verwendet.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern.
• wenden die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren an und veranschaulichen sie geometrisch.
• überprüfen zwei Vektoren auf Kollinearität.
• wenden Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten an (BG T).
• beschreiben Geraden und Ebenen durch Gleichungen in Parameterform (BG T).
• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und bestimmen Schnittpunkte (BG T).
• deuten das Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion.</td></tr>
<tr><td></td><td>• beschreiben Ebenen durch Gleichungen in Normalen- und Koordinatenform (BG T).
• wechseln zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von Ebenen (BG T).
• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen sowie von Ebenen und lösen Schnittprobleme (BG T).
• beschreiben Streckungen, Spiegelungen und Drehungen um die Koordinatenachsen im Raum, sowie die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen (BG T).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">L4 Leitidee: Funktionaler Zusammenhang</th></tr>
<tr><td colspan="2">Funktionen eignen sich zur Modellierung einer Vielzahl von Anwendungssituationen. Mit den Mitteln der Differential- und Integralrechnung werden zum einen Veränderungen beschrieben und analysiert, zum anderen Bestände rekonstruiert. Die vertiefende Behandlung von funktionalen Zusammenhängen auch unter Nutzung der Ableitungsfunktionen und der Entwicklung der Integralrechnung hat zum Ziel, unterschiedliche Typen von Problemen mit Anwendungs- und Berufsbezügen bearbeiten zu können und einen Zugang zu neuen Vertretern bekannter Funktionstypen zu gewinnen.
Stochastische Situationen werden durch den funktionalen Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeiten beschrieben.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• deuten das bestimmte Integral als aus Änderungen rekonstruierter Bestand und als Flächeninhalt.
• beschreiben das Integral als Grenzwert von Produktsummen.
• deuten bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang.
• geben Stammfunktionen für die Funktionen f mit $f(x)=x^n;\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin(x)$ und $f(x)=\cos(x)$ an.
• entwickeln Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel.
• überprüfen Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln.
• begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch anschaulich.
• beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeit beim exponentiellen Wachstum als proportional zum Bestand.
• charakterisieren die Basis e durch $(e^x)'=e^x$.
• verwenden die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x)=e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x)=a^x$.
• beschreiben das asymptotische Verhalten des begrenzten Wachstums.
• beschreiben stochastische Situationen durch Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
• beschreiben Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen tabellarisch und grafisch.</td></tr>
<tr><td>

• bestimmen ausgehend von vorgegebenen Eigenschaften in Anwendungs- und Berufssituationen und von lokalen und globalen Eigenschaften des Graphen einer ganzrationalen Funktion deren Funktionsterm.</td><td>• verwenden die ln-Funktion als eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x};\ x>0$.
• interpretieren Integralfunktionen auch als Bestands- und Flächeninhaltsfunktion.
• unterscheiden Integral- und Stammfunktion.
• interpretieren und bestimmen uneigentliche Integrale als Grenzwerte.
• begründen die Volumenformel für Körper, die durch Rotation von Graphen um die x-Achse entstehen und wenden diese an.
• klassifizieren Funktionen nach bestimmten globalen Eigenschaften.
• nutzen bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten</td></tr>
</table>

• führen für ganzrationale Funktionen die Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durch. • bestimmen ausgehend von vorgegebenen Eigenschaften in Anwendungs- und Berufssituationen und von lokalen und globalen Eigenschaften des Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion deren Funktionsterm (BG GuS, BG W). • führen für gebrochen-rationale Funktionen die Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durch (BG GuS, BG W).	Funktionsterms. • übersetzen vorgegebene lokale Eigenschaften des Graphen in Bedingungen an den Funktionsterm und ermitteln diesen. • nutzen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen (BG T). • benennen und begründen Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen, bei Scharen gebrochen-rationaler Funktionen (BG GuS, BG W) und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Scharparameter.
• beschreiben Verknüpfungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen in einfachen Fällen, untersuchen diese, wenden sie in Anwendungs- und Berufssituationen an und führen Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durch. • beschreiben Verkettungen der e-Funktion mit linearen Funktionen, untersuchen diese, wenden sie in Anwendungs- und Berufssituationen an und führen Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durch.	• beschreiben begrenztes und logistisches Wachstum, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen. • vergleichen die bereits bekannten Wachstumsmodelle und das des logistischen Wachstums untereinander. • beschreiben und untersuchen Verkettungen und Verknüpfungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Anwendungs- und Berufssituationen. • beschreiben das asymptotische Verhalten bei additiver Verknüpfung der e-Funktion mit linearen Funktionen. • ermitteln Parameter, auch zur Angleichung an Daten. • führen die Variation des Parameters zur Anpassung an vorgegebene Eigenschaften durch. • beschreiben Wachstumsmodelle mithilfe der zugehörigen Differentialgleichungen und überprüfen mögliche Lösungsfunktionen.

<table>
<tr><th colspan="2">L5 Leitidee: Daten und Zufall</th></tr>
<tr><td colspan="2">Bekannte Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von Häufigkeitsverteilungen statistischer Daten werden mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in zufallsabhängigen Anwendungs- und Berufssituationen vernetzt.
Durch Verfahren und Begriffe der Stochastik kann man zu kontrollierbaren Urteilen in realen Entscheidungssituationen gelangen. Die eingeführte Technologie bietet die Möglichkeit, umfangreiches Datenmaterial zu bearbeiten und zu analysieren.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler…
• beschreiben Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und lösen damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten.
• untersuchen Teilvorgänge in mehrstufigen Zufallsexperimenten auf stochastische Unabhängigkeit.
• erläutern die Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
• stellen den Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung her.
• berechnen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.
• verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen.
• erläutern und verwenden die Binomialverteilung sowie Binomialkoeffizienten.
• charakterisieren Wahrscheinlichkeitsverteilungen anhand der Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung und nutzen diese bei der Binomialverteilung für Interpretationen.
• ermitteln Prognoseintervalle für Stichproben im Kontext der Binomialverteilung.
• ermitteln, ob ein vermuteter Wert für den Parameter p der Binomialverteilung mit einer vorliegenden Stichprobe verträglich ist.</td></tr>
<tr><td></td><td>• stellen den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingter Wahrscheinlichkeit her.
• unterscheiden zwischen kausaler und stochastischer Unabhängigkeit.
• begründen die Binomialverteilung als Näherungslösung für weitere stochastische Situationen.
• unterscheiden zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen sowie zwischen Säulendiagrammen und Histogrammen.
• nutzen den Erwartungswert und die Standardabweichung einer normalverteilten Zufallsgröße für Interpretationen.
• beurteilen die Approximierbarkeit der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.
• berechnen Prognoseintervalle für eine binomialverteilte Zufallsgröße mithilfe der Approximation durch die Normalverteilung.
• berechnen Konfidenzintervalle für den Parameter p und zu einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße mithilfe der Approximation durch die Normalverteilung, auch unter Verwendung grafischer</td></tr>
</table>

	Darstellungen. • verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Anwendungs- und Berufssituationen, die sich annähernd durch die Normalverteilung beschreiben lassen.

3.3 Lernbereiche

Die Lernbereiche geben Anregungen und Hilfestellungen für eine unterrichtliche Umsetzung sowie für die Gestaltung schuleigener Arbeitspläne. Sie zeigen eine Möglichkeit für die Umsetzung des Kerncurriculums im Rahmen einer didaktischen Grundkonzeption auf, die die zu erwerbenden inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen verknüpft. Die in Kapitel 3.2 formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen werden durch die Lernbereiche vollständig erfasst. Eine Entwicklung der in Kapitel 3.1 formulierten prozessbezogenen Kompetenzen ist in den Lernbereichen angelegt. Die schwerpunktmäßige Zuordnung der prozessbezogenen Kompetenzen erfolgt durch die Lehrkraft.

Die Kompetenzbereiche durchziehen die klassischen Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/ Lineare Algebra und Stochastik und werden in ihnen verknüpft.

Es werden jeweils Lernbereiche für die gemeinsame Einführungsphase und solche für die Qualifikationsphase der verschiedenen Schulformen beschrieben. Die Reihung und Struktur stellt keine Setzung, sondern einen sachlogischen Vorschlag dar. Die Umsetzung der Lernbereiche wird in den schuleigenen Arbeitsplänen dargestellt. Diese berücksichtigen in geeigneter Weise Möglichkeiten zu Vernetzungen und Vertiefungen.

Für Kurse auf grundlegendem und Kurse auf erhöhtem Anforderungsniveau sind unterschiedliche Lernbereiche konzipiert. Diese sind den mathematischen Sachgebieten zugeordnet und weisen auch Vernetzungen aus. So bietet die Behandlung eines algorithmisierbaren Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme die Möglichkeit der Vernetzung der Lernbereiche „Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen" und „Raumanschauung und Koordinatisierung" für das grundlegende Anforderungsniveau sowie der Lernbereiche „Kurvenanpassung und Funktionenscharen" und „Raumanschauung und Koordinatisierung" für das erhöhte Anforderungsniveau.

Der Lernbereich „Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen" greift Fragestellungen der Einführungsphase auf und vertieft die Fähigkeiten und Fertigkeiten im Zusammenhang mit ganzrationalen Funktionen. Er ist somit eher am Anfang des Unterrichtsganges der Qualifikationsphase angesiedelt. Der Lernbereich „Kurvenanpassung und Funktionenscharen" greift demgegenüber auf alle behandelten Funktionstypen zu und eignet sich eher zur Behandlung zusammenfassender und zusammenführender Fragestellungen zum Ende des Unterrichtsganges der Qualifikationsphase.

In den Lernbereichen werden zunächst die mit ihnen verbundenen **Intentionen** kurz dargestellt. Die Beschäftigung mit Mathematik wird von Schülerinnen und Schülern immer dann als sinnvoll angesehen, wenn Probleme zur Auseinandersetzung motivieren. Dieses kann mit Anwendungsorientierung genauso geschehen wie mit innermathematischen Fragestellungen. Ausgehend von konkreten Situationen wird ein grundlegendes Verständnis für Prinzipien, Techniken und Methoden geschaffen. Eine vertiefende, innermathematische Betrachtung führt zu einer zunehmenden Abstraktion und zu einer fachspezifischen Begrifflichkeit.

Im **Kern** werden die in 3.2 formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen konkretisiert und mit unterrichtspraktischen Handlungsschritten verknüpft.

Die **fakultativen Erweiterungen** geben Anregungen für mögliche Vernetzungen und Vertiefungen, die über den Kern hinausgehen und auf ein tieferes und komplexeres Verständnis der Verfahren und Begrifflichkeiten abzielen. Jede einzelne Ergänzung rundet einerseits die Sicht auf die Mathematik zu

einem umfassenderen Bild ab, zeigt aber andererseits auch klar die Abgrenzung zu den im Kern thematisierten Kompetenzen. Vertiefungen bieten sich insbesondere für Kurse auf erhöhtem Anforderungsniveau an.
Die Lernbereiche zur Einführungsphase beinhalten **Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge.** Diese weisen auf Gelegenheiten hin, die Kompetenzen im Umgang mit digitalen Mathematikwerkzeugen aufzubauen, zu festigen bzw. anzuwenden. Sie geben Anregungen für einen Unterrichtseinsatz, verzichten aber auf die Aufzählung von Routinen wie beispielsweise die Darstellung von Funktionen oder das Lösen von Gleichungen. Die Lernbereiche zur Qualifikationsphase listen solche Hinweise nicht auf. Es wird davon ausgegangen, dass der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge weiterhin adäquat erfolgt. Art und Leistungsumfang der digitalen Mathematikwerkzeuge, die den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen sollen, werden in einem gesonderten Erlass geregelt.

In den Hinweisen zu gesondertem **Online-Material** wird auf weitergehende Erläuterungen sowie unterstützende Ausführungen zu verschiedenen Bereichen des Kerncurriculums verwiesen. Übergreifende Online-Materialien wie „Lernbereiche und Zeitbedarfe“ und „Hilfsmittelfreie Fertigkeiten im Umgang mit Termen in der Oberstufe“ werden nicht gesondert aufgeführt.

3.3.1 Lernbereiche für die Einführungsphase

Lernbereich: Beschreibende Statistik
Intentionen Datenerhebungen werden exemplarisch geplant und beurteilt. Die erhobenen Daten lassen sich auf unterschiedliche Weisen durch Säulendiagramme darstellen sowie durch Lage- und Streumaße aufbereiten. Je nach Wahl der Lage- und Streumaße können sich bei gleichem Datenmaterial unterschiedliche Aussagen und Interpretationen ergeben. Deshalb wird die Aussagekraft der Lagemaße „arithmetisches Mittel“, „Modalwert“ und „Median“ sowie der Streumaße „empirische Varianz“, „empirische Standardabweichung“ und „Spannweite“ thematisiert. Das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung von Häufigkeitsverteilungen bereiten die analogen Begriffe bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen vor. Für das Berufliche Gymnasium (BG) bieten sich folgende Anwendungs- und Berufsbezüge an: • Messwerte (BG T), • Marketing oder Produktforschung (BG GuS, BG W).

Kern
• Datenerhebung
  ▪ Merkmale festlegen und identifizieren
  ▪ Klassierung der Daten und Repräsentativität der Stichprobe berücksichtigen
  ▪ Häufigkeitsverteilungen in Säulendiagrammen darstellen und interpretieren
• Kenngrößen
  ▪ Datenmaterial mithilfe der Kenngrößen Stichprobenumfang n, arithmetisches Mittel, Modalwert, Median, empirische Varianz, empirische Standardabweichung s_n und Spannweite charakterisieren und interpretieren
  ▪ Arithmetisches Mittel, Median und Modalwert als Lagemaße bezüglich ihrer Aussagekraft unterscheiden
  ▪ Empirische Varianz, empirische Standardabweichung s_n und Spannweite als Streumaße bezüglich ihrer Aussagekraft unterscheiden
  ▪ Datensätze mithilfe von Kenngrößen vergleichen

Fakultative Erweiterungen: Boxplots
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Messen; Daten und Zufall
Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge: Statistikmodul des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs
Online-Material: Beschreibende Statistik

Lernbereich: Elementare Funktionenlehre

Intentionen

Die Schülerinnen und Schüler bringen aus dem Unterricht des Sekundarbereichs I Kenntnisse zu einigen Funktionsklassen sowie Fertigkeiten und Fähigkeiten im Umgang mit Funktionen mit. Diese werden an neu einzuführenden Funktionsklassen vertieft und erweitert.

Der Lernbereich „Elementare Funktionenlehre“ ist eng verknüpft mit dem Lernbereich „Ableitungen“. Die Kompetenzen im Umgang mit Funktionen werden weiterentwickelt, auch im Hinblick auf die Begrifflichkeiten im Lernbereich „Ableitungen“.

Als neue Funktionsklasse lernen die Schülerinnen und Schüler die Potenzfunktionen kennen. Wurzelfunktionen werden als spezielle Potenzfunktionen betrachtet. Ausgehend von geeigneten Anwendungsbeispielen werden Potenzfunktionen zu ganzrationalen Funktionen erweitert.

Die leitenden Fragestellungen bei der Untersuchung der Auswirkungen von Parametervariationen auf Funktionsgraphen und Funktionsgleichungen, die den Schülerinnen und Schülern zum Beispiel von den quadratischen Funktionen bekannt sind, werden zunächst auf Funktionen mit Potenzen übertragen. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Bedeutung der Parameter erläutern. Dabei werden die Potenzrechengesetze genutzt, um Erkenntnisse über die Funktionen oder einen zugehörigen Sachzusammenhang zu gewinnen.

Die Fähigkeit, Funktionsgraphen zu beschreiben und zu klassifizieren, wird durch Verwendung der Begriffe Symmetrie, Nullstellen und Globalverhalten weiter entwickelt. Bei der Behandlung von Sachproblemen sind auch der Definitions- und der Wertebereich der modellierenden Funktion zu betrachten. Bei der Bestimmung der Modellierungsfunktionen ist das Aufstellen und Lösen von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen notwendig. Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen.

Mithilfe der weiterentwickelten Begrifflichkeiten und anhand geeigneter Anwendungsbeispiele werden Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen gegeneinander abgegrenzt.

Für das Berufliche Gymnasium (BG) bieten sich folgende Anwendungs- und Berufsbezüge an:

- Kosten, Erlöse, Gewinn, Angebot und Nachfrage, Produktlebenszyklus, Zinsrechnung (BG GuS, BG W),
- Beschleunigung, Geschwindigkeit, Weg (BG T).

Kern

- Potenzfunktionen
  - Graphen von Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ hilfsmittelfrei skizzieren
  - Globalverhalten und Symmetrie beschreiben
  - Wurzelfunktionen als spezielle Potenzfunktionen darstellen
  - exemplarisch die Funktionen f und g mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt[3]{x}$ beschreiben und ihre Graphen hilfsmittelfrei skizzieren
- Vergleich von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen
  - Parametervariationen für Funktionen g mit $g(x) = a \cdot f\left(b \cdot (x - c)\right) + d$ exemplarisch durchführen sowie Gemeinsamkeiten und Unterschiede in der Auswirkung der Parametervariationen auf die Graphen zu verschiedenen Funktionsklassen beschreiben
  - funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen unter Verwendung von Eigenschaften bestimmter Funktionen identifizieren
- Ganzrationale Funktionen
  - die Graphen von ganzrationalen Funktionen als Überlagerung von Graphen von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten deuten
  - Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen beschreiben
  - in Anwendungssituationen funktionale Zusammenhänge in Tabellen, Graphen und Sachtexten erkennen und mithilfe ganzrationaler Funktionen modellieren
  - Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen mithilfe der aus dem Sekundarbereich I bekannten Verfahren lösen

- lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge lösen
- Nullstellen bestimmen und deren Zusammenhang mit der faktorisierten Termdarstellung beschreiben
- das Globalverhalten anhand der Termdarstellung beschreiben
- mögliche Symmetrien des Graphen zur y-Achse und zum Ursprung begründen
- Zusammenhang von Funktionsgleichung und Graph anhand der Termdarstellung in allgemeiner und in faktorisierter Form erläutern

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahlen; Funktionaler Zusammenhang

Fakultative Erweiterungen:

Wurzelfunktion sowie Kehrwertfunktion als Umkehrfunktion

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge:

CAS zum Lösen von Gleichungen; Regressionsmodul

Online-Material:

elementare Funktionenlehre; Parametervariationen

Lernbereich: Ableitungen

Intentionen

Mithilfe der Ableitung wird die Beschreibung der Graphen von Funktionen um die Quantifizierbarkeit des Steigungsverhaltens sowie die Extrem- und Wendepunkte systematisch erweitert.

Dabei ist die Verwendung von Grenzwerten notwendig. Sie werden auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, der sich auf die Anschauung gründet, ermittelt.

Die Begriffe der mittleren und lokalen Änderungsrate werden in Sachkontexten gebildet. Ausgehend von mittleren Änderungsraten werden die lokale Änderungsrate sowie ausgehend von Sekantensteigungen die Tangentensteigung bestimmt. Die Ableitung wird als lokale Änderungsrate sowie als Tangentensteigung beschrieben und interpretiert, und dieser Zusammenhang wird an Beispielen erläutert.

Die funktionale Beschreibung von lokalen Änderungsraten führt zur Ableitungsfunktion.

Das Verständnis des Zusammenhangs zwischen Ableitungsgraph und Funktionsgraph wird vertieft, indem diese auch in Sachkontexten wechselseitig auseinander entwickelt werden.

Die Frage, ob der dargestellte Ausschnitt eines Graphen das Globalverhalten oder Anzahl und Lage besonderer Punkte wiedergibt, ist ein Motiv für eine termorientierte Untersuchung. Notwendige und hinreichende Kriterien für lokale Extrem- und für Wendestellen werden anschaulich aus der Betrachtung der Graphen zur Ausgangsfunktion und zu den Ableitungsfunktionen gewonnen.

Die mithilfe des Ableitungsbegriffs gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Sachprobleme zu lösen.

Die Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten erfolgt exemplarisch.

Zur Bestimmung von Ableitungen an einer Stelle oder zur Entwicklung von Ableitungsfunktionen werden Ableitungsregeln verwendet.

Die Ableitungen der Sinus- und Kosinusfunktion werden mindestens grafisch plausibel gemacht.

Für das Berufliche Gymnasium (BG) bieten sich folgende Anwendungs- und Berufsbezüge an:

- Steigfähigkeit von Fahrzeugen (BG T),
- Optimierung (Erlös- und Gewinnmaximierung, Materialminimierung) (BG GuS, BG T, BG W).

Kern

- Ableitung an einer Stelle
  - mittlere und lokale Änderungsraten in Sachzusammenhängen bestimmen
  - mittlere und lokale Änderungsraten mithilfe des Differenzenquotienten bestimmen
  - Sekanten- und Tangentensteigungen bestimmen
  - Ableitungen als lokale Änderungsraten und Tangentensteigungen auch in Sachzusammenhängen deuten
  - die Schreibweisen $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ interpretieren, erläutern und anwenden
- Ableitungsfunktion
  - wechselseitig den Ableitungsgraphen und den Funktionsgraphen auseinander entwickeln und dabei Zusammenhänge beschreiben und begründen
  - für die Funktionen f mit $f(x) = x^2$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ die Ableitungen mithilfe des Differenzenquotienten herleiten
  - Summen- und Faktorregel mindestens anschaulich begründen und anwenden
  - die Ableitung als Funktion in Abhängigkeit von der Stelle angeben
  - die Ableitung der Funktionen f mit $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sin(x)$ sowie $f(x) = \cos(x)$ angeben
- Verwendung von Ableitungen

▪ Gleichungen von Tangenten und Normalen bestimmen ▪ Funktionen und ihre Graphen auf Monotonie untersuchen ▪ Kriterien für lokale Extrem- und Wendestellen entwickeln und anwenden ▪ Sachprobleme, insbesondere Optimierungsprobleme lösen
Fakultative Erweiterungen: Ableitung weiterer Funktionen mithilfe des Differenzenquotienten
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang
Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge: Berechnung, Kontrolle, Exploration
Online-Material: Propädeutischer Grenzwert; Ableitungen

3.3.2 Lernbereiche für die Qualifikationsphase
3.3.2.1 Lernbereiche für Gymnasium, Gesamtschule, Abendgymnasium und Kolleg

Lernbereiche gA

Lernbereich: Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen	**gA**
Intentionen Zu vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten sowie Eigenschaften des Graphen einer Funktion werden Bedingungen für den Term einer Funktion formuliert. Dabei wird ein geeigneter Grad einer ganzrationalen Funktion ausgewählt und ihr Term ermittelt. Die Fragestellungen zur Kurvenanpassung führen häufig auf lineare Gleichungssysteme. Die Behandlung eines algorithmisierbaren Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme bietet die Möglichkeit der Vernetzung mit dem Lernbereich „Raumanschauung und Koordinatisierung".	
Kern ▪ zu vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten Bedingungen für den Term einer Funktion formulieren ▪ vorgegebene lokale und globale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen ▪ ein algorithmisierbares Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und anwenden ▪ Funktionsterme anhand von Bedingungen ermitteln ▪ Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durchführen	
Fakultative Erweiterungen: Vergleich mit durch Regression gewonnenen Funktionen	
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang	
Online-Material: Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen (gA)	

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung	gA

Intentionen

Bei der Behandlung von Sachproblemen aus Kontexten wie Zu- und Ablauf sowie Geschwindigkeit und Weg werden eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt und die Erfahrungen mit Grenzprozessen erweitert.
Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.

Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ mit $F' = f$ formuliert.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Stammfunktionen werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln überprüft und in einfachen Fällen entwickelt.

Die gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Sachprobleme zu lösen. Dabei ermöglicht das digitale Mathematikwerkzeug auch die Betrachtung komplexerer Funktionen.

Kern

- Bestimmtes Integral
  - Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren
  - das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben
  - den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen
  - bestimmte Integrale berechnen
  - bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand
  - Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen
- Stammfunktion
  - Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen
  - Stammfunktionen zu Funktionen f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ angeben
  - Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln

Fakultative Erweiterungen:

Integralfunktion

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung (gA)

Lernbereich: Die e-Funktion	gA

Intentionen

Ausgehend von bekannten Beispielen zu exponentiellen Wachstumsprozessen werden die Exponentialfunktionen wieder aufgegriffen. Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen mithilfe der Wachstumsgeschwindigkeit wird die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert.

Die Exponentialfunktion zur Basis e wird durch die Eigenschaft beschrieben, dass sie mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist. Exponentialterme mit beliebigen Basen werden in Terme zur Basis e umgeformt sowie abgleitet.

Die Verkettung mit linearen Funktionen wird definiert und die Kettenregel bei linearer innerer Funktion als neue Ableitungsregel eingeführt. Zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen zur Basis e wird der ln als Umkehroperation verwendet.

Die additive und multiplikative Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen wird eingeführt und an ausgewählten Beispielen untersucht. Die zur Ableitung notwendige Produktregel wird eingeführt.

Zur Angleichung an Daten werden Parameter durch Einsetzen konkreter Werte bestimmt.

Das asymptotische Verhalten wird als eine besondere Eigenschaft beschrieben und am Beispiel des begrenzten Wachstums thematisiert.

Bei der Bearbeitung von Problemen mit verknüpften Funktionen und mit linear verketteten Funktionen müssen auch angemessene Verfahren zum Lösen entsprechender Gleichungen thematisiert werden.

Kern

- die Wachstumsgeschwindigkeit bei exponentiellem Wachstum als proportional zum Bestand beschreiben
- die Basis e durch $(e^x)' = e^x$ charakterisieren
- die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x) = a^x$ verwenden
- in einfachen Fällen additive und multiplikative Verknüpfungen mit ganzrationalen Funktionen beschreiben, untersuchen und in Sachproblemen anwenden
- Verkettung mit linearen Funktionen beschreiben, untersuchen und in Sachproblemen anwenden
- Produktregel und Kettenregel bei linearer innerer Funktion anwenden
- Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durchführen
- Exponentialgleichungen lösen
- asymptotisches Verhalten des begrenzten Wachstums beschreiben

Fakultative Erweiterungen:

ln als Funktion

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Die e-Funktion (gA)

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung	**gA**

Intentionen

Ausgehend von Fragen der Orientierung im Raum werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.

Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum. Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.

Kern

- Raumanschauung und Koordinatisierung
  - Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben
  - die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen
  - Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen
  - Kollinearität zweier Vektoren überprüfen
  - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden
- Maße und Lagen
  - Abstände zwischen Punkten bestimmen
  - Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden
  - Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen
  - Winkelgrößen zwischen Strecken und Geraden bestimmen
  - Lagebeziehungen von Geraden untersuchen und Schnittpunkte bestimmen

Fakultative Erweiterungen:

Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen; Ebenengleichungen in Normalenform; Kreis- und Kugelgleichung

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form

Online-Material:

Raumanschauung und Koordinatisierung (gA); Geometrie alternativer Einstieg (gA und eA)

Lernbereich: Daten und Zufall	gA

Intentionen

Ausgehend von Erfahrungen mit Zufallsexperimenten werden die Kenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert.

Beim Umgang mit den Einträgen in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Hierbei wird insbesondere zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterschieden. Der Vergleich zwischen dem Ziehen ohne Zurücklegen und dem Ziehen mit Zurücklegen fördert das Verständnis für die stochastische Unabhängigkeit.

Häufigkeitsverteilungen vorliegender Daten lassen sich durch diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellieren, um – durch Simulation oder durch Rechnung – Prognosen zu gewinnen. Dabei wird die zugehörige Zufallsgröße angegeben. Die bekannten Kenngrößen für empirisch gewonnene Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf das jeweilige theoretische Modell der Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen und führen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung.

Exemplarisch für Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Binomialverteilungen und deren grafische Darstellungen erkundet. Mithilfe von Simulationen werden stochastische Situationen betrachtet, die näherungsweise auf die Binomialverteilung führen.

Mithilfe der Binomialverteilung lassen sich (auch durch Simulation) Prognoseintervalle über Stichproben gewinnen, die bei vorliegender Grundgesamtheit zu erwarten sind. Umgekehrt lässt sich durch Rechnersimulationen ermitteln, ob ein vermuteter Anteil der Grundgesamtheit bzw. eine vermutete Wahrscheinlichkeit mit einer vorliegenden Stichprobe verträglich ist.

Kern

- Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
  - Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
  - Teilvorgänge bei mehrstufigen Zufallsexperimenten auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen
  - Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
  - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
  - Faire Spiele mithilfe des Erwartungswerts kennzeichnen
- Binomialverteilung
  - Eignung des Modells beurteilen
  - Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
  - Zufallsgröße sowie Parameter n und p der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
  - die Bedeutung der Faktoren im Term $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ erläutern
  - Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
  - die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
  - die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
  - Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
  - beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters p mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist
  - Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden

Fakultative Erweiterungen: ---

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Messen; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall

Online-Material:

Daten und Zufall (gA)

Lernbereiche eA

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung	eA

Intentionen

Bei der Behandlung von Sachproblemen aus Kontexten wie Zu- und Ablauf sowie Geschwindigkeit und Weg werden eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt und die Erfahrungen mit Grenzprozessen erweitert.
Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.

Die funktionale Beschreibung von Integralen führt zur Integralfunktion, die als Bestandsfunktion und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhaltsfunktion interpretiert werden kann. Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Stammfunktionen werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln überprüft und in einfachen Fällen entwickelt.
Die gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Sachprobleme zu lösen. Dabei ermöglicht das digitale Mathematikwerkzeug auch die Betrachtung komplexerer Funktionen.

Das Verständnis des Integralbegriffs wird durch die Herleitung der Volumenformel eines Rotationskörpers und die Bestimmung uneigentlicher Integrale erweitert.

Kern

- Bestimmtes Integral
  - Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren
  - das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben
  - den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen
  - bestimmte Integrale berechnen
  - bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierter Bestand
  - Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen
- Integral- und Stammfunktion
  - Integralfunktionen auch als Bestands- oder Flächeninhaltsfunktion interpretieren
  - Integral- und Stammfunktion unterscheiden
  - Stammfunktionen zu Funktionen f mit $f(x)=x^n;\ n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin(x)$ und $f(x)=\cos(x)$ angeben
  - die ln-Funktion als eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x};\ x>0$ verwenden
  - Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion, sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln
  - Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen
- Vertiefungen
  - Volumenformel für Körper, die durch Rotation eines Graphen um die x-Achse entstehen, herleiten und anwenden
  - uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten interpretieren und bestimmen

Fakultative Erweiterungen:

Mantelflächen; Bogenlänge; Rotation um die y-Achse; Mittelwerte; Schwerpunkte

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung (eA)

Lernbereich: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion	eA

Intentionen

Ausgehend von Beispielen zu exponentiellen und begrenzten Zu- und Abnahmeprozessen werden die bereits bekannten Wachstumsmodelle um das des logistischen Wachstums ergänzt. Die verschiedenen Wachstumsmodelle werden verglichen und im Sachzusammenhang interpretiert. Zur Angleichung an Daten werden Parameter durch Einsetzen konkreter Werte bestimmt.

Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen mithilfe der Wachstumsgeschwindigkeit wird die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert.

Die Exponentialfunktion zur Basis e wird durch die Eigenschaft beschrieben, dass sie mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist, was auch durch die Differentialgleichung $f' = f$ beschrieben wird. Die Verkettung mit ganzrationalen Funktionen wird definiert und die Kettenregel als neue Ableitungsregel eingeführt. Die Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen wird eingeführt und, ebenso wie die Verkettung, an ausgewählten Beispielen hinsichtlich charakteristischer Merkmale untersucht und so zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme genutzt. Dabei wird auch die Produktregel eingeführt.

Zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen zur Basis e wird der ln als Umkehroperation verwendet und die ln-Funktion wird als Stammfunktion für f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ angegeben.

Bei der Bearbeitung von Problemen mit verketteten und mit verknüpften Funktionen müssen auch Verfahren zum Lösen entsprechender Gleichungen und Gleichungssysteme thematisiert werden.

Das asymptotische Verhalten der Graphen von Exponentialfunktionen wird als eine besondere Eigenschaft beschrieben. Dabei werden die Vorstellungen von Grenzprozessen vertieft.

Bei der exponentiellen, begrenzten und logistischen Modellierung von Wachstumsvorgängen werden die Zusammenhänge zwischen Änderungsrate und Bestand durch Differentialgleichungen beschrieben, die auch zur Klassifizierung nach Wachstumsarten verwendet werden können. Funktionen werden durch Einsetzen in die Differentialgleichung auf ihre Eignung als Lösungsfunktion überprüft.

Kern

- Untersuchung von Wachstumsprozessen
  - begrenztes und logistisches Wachstum beschreiben, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen
  - verschiedene Wachstumsmodelle vergleichen
  - asymptotisches Verhalten im Sachzusammenhang beschreiben
  - Modelle mithilfe zugehöriger Differentialgleichungen beschreiben und mögliche Lösungsfunktionen überprüfen
- e-Funktion
  - die Basis e durch $(e^x)' = e^x$ charakterisieren
  - die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x) = a^x$ verwenden
  - Verkettung und Verknüpfung mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Sachsituationen beschreiben und untersuchen
  - asymptotisches Verhalten bei additiver Verknüpfung linearer Funktionen mit e-Funktionen beschreiben
  - Exponentialgleichungen lösen
  - Produkt- und Kettenregel anwenden
  - Scharparameter, auch zur Angleichung an Daten, ermitteln
  - Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen durch Einsetzen überprüfen

Fakultative Erweiterungen:

Quotientenregel

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang
Online-Material: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion (eA)

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung	**eA**

Intentionen

Ausgehend von Fragen der Orientierung im Raum werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.

Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum.

Die Projektion vom Raum in die Ebene wird mit Matrizen beschrieben.

Unterschiedliche Darstellungsformen von Geraden- und Ebenengleichungen ermöglichen eine flexible Untersuchung von Lagebeziehungen. Deshalb ist unter Umständen der Wechsel zwischen Darstellungsformen notwendig.

Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.

Kern

- Raumanschauung und Koordinatisierung
  - Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben
  - die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen
  - Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen
  - Kollinearität zweier Vektoren überprüfen
  - die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen etwa der Form $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben und Punktkoordinaten für Schrägbilder berechnen
- Darstellungsformen
  - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden
  - Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform verwenden
  - zwischen den Darstellungsformen wechseln
- Maße und Lagen
  - Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen
  - Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden
  - Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen
  - Winkelgrößen bestimmen
  - Lagebeziehungen von Geraden, Geraden und Ebenen sowie von Ebenen untersuchen und Schnittprobleme lösen
  - den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und in geeigneten Fällen anwenden

Fakultative Erweiterungen:

Vektoren in nichtgeometrischen Kontexten; weitere Abbildungsmatrizen; Kreis- und Kugelgleichung

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form

Online-Material:

Raumanschauung und Koordinatisierung (eA); Geometrie alternativer Einstieg (gA und eA)

Lernbereich: Kurvenanpassung und Funktionsscharen	eA

Intentionen

Zu vorgegebenen Datenpunkten und/oder vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten werden Bedingungen an eine Modellfunktion formuliert. Passend zu diesen Bedingungen werden ein geeigneter Funktionstyp ausgewählt und Funktionsgleichungen bestimmt. Umgekehrt werden anhand gegebener Funktionsterme neuer Vertreter bekannter Funktionstypen die bekannten Eigenschaften zur Beschreibung verwendet.

Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen.

Bei Modellierungen mit abschnittsweise definierten Funktionen sind darüber hinaus an den Übergängen Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit als Bedingungen zu nutzen und im Sachkontext zu interpretieren. Die Zugänge zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden anschauungsgeleitet gefunden.

Von einem Parameter abhängige ganzrationale Funktionen oder Funktionen, die durch Verknüpfung und Verkettung von ganzrationalen mit e-Funktionen entstehen, werden jeweils zu einer Funktionen-schar zusammengefasst. Die Funktionen solcher Scharen werden hinsichtlich ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede klassifiziert.

Fragestellungen in diesem Lernbereich führen häufig auf lineare Gleichungssysteme. Dies bietet die Möglichkeit der Vernetzung mit dem Lernbereich „Raumanschauung und Koordinatisierung“.

Kern

- Kurvenanpassung
  - Funktionen nach globalen Eigenschaften wie Symmetrie, Verhalten für $|x| \to \infty$, asymptotisches Verhalten bzw. Periodizität klassifizieren
  - bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten Funktionsterms nutzen
  - vorgegebene lokale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen und diesen ermitteln
  - Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen nutzen
- Funktionenscharen
  - Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Scharparameter benennen und begründen
  - Variationen des Scharparameters zur Anpassung an vorgegebene Eigenschaften durchführen

Fakultative Erweiterungen:

Splines, Bestimmung von Ortskurven

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Kurvenanpassung und Funktionsscharen (eA)

Lernbereich: Daten und Zufall	**eA**

Intentionen

Ausgehend von Erfahrungen mit Zufallsexperimenten werden die Kenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert.

Beim Umgang mit den Einträgen in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Hierbei wird insbesondere zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterschieden. Der Vergleich zwischen dem Ziehen ohne Zurücklegen und dem Ziehen mit Zurücklegen fördert das Verständnis für die stochastische Unabhängigkeit.

Häufigkeitsverteilungen vorliegender Daten lassen sich durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellieren, etwa um – durch Simulation und durch Rechnung – Prognosen zu gewinnen. Dabei wird die zugehörige Zufallsgröße angegeben. Die bekannten Kenngrößen für empirisch gewonnene Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf das jeweilige theoretische Modell der Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen und führen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung.

Es werden diskrete von stetigen Zufallsgrößen abgegrenzt.

Exemplarisch für Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden die Binomial- und Normalverteilung und deren grafische Darstellungen für verschiedene Parameter erkundet. Die Normalverteilung wird als ein Beispiel für eine stetige Verteilung und in geeigneten Fällen als Approximation der Binomialverteilung verwendet. Mithilfe von Simulationen werden stochastische Situationen betrachtet, die näherungsweise auf die Binomial- bzw. die Normalverteilung führen.

Prognose- und Konfidenzintervalle lassen sich durch Variation der Parameter ermitteln und mithilfe der Normalverteilung auch berechnen. Sie stellen Näherungen für die entsprechenden Intervalle der Binomialverteilung dar. Simulationen fördern das Verständnis hinsichtlich Unsicherheit und Genauigkeit der Konfidenzintervalle.

Kern

- Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
  - Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
  - Zusammenhang zwischen Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten herstellen
  - Kausale und stochastische Unabhängigkeit voneinander abgrenzen

- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen
  - Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
  - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
  - faire Spiele mithilfe des Erwartungswerts kennzeichnen

- Binomialverteilung
  - Eignung des Modells beurteilen
  - Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
  - Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
  - Zufallsgröße sowie Parameter n und p der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
  - die Bedeutung der Faktoren im Term $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ erläutern
  - Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
  - die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
  - die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
  - Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
  - beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters p mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist
  - die Binomialverteilung als näherungsweises Modell für weitere stochastische Situationen verwenden

- Normalverteilung
  - Diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden

- Notwendigkeit von Histogrammen erläutern
- Parameter der Normalverteilung erläutern und in Sachkontexten nutzen

- Binomial- und Normalverteilung
  - Angemessenheit der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung beurteilen
  - Prognoseintervalle auch mithilfe von σ-Umgebungen für Anteile berechnen und interpretieren
  - Konfidenzintervalle für den Parameter p der Binomialverteilung ermitteln und interpretieren
  - die Intervallgrenzen von Konfidenzintervallen als zufällige Größen erläutern
  - die Sicherheitswahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit deuten, mit der die Konfidenzintervalle bei Verwendung der Normalverteilung den wahren Wert überdecken
  - exemplarisch stochastische Situationen simulieren, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen, um Näherungslösungen in komplexeren Situationen zu erhalten

Fakultative Erweiterungen:

andere Verteilungen

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Messen; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall

Online-Material:

Daten und Zufall (eA)

3.3.2.2 Lernbereiche für das Berufliche Gymnasium

Einige Inhalte der Lernbereiche der Qualifikationsphase werden nach den Fachrichtungen des Beruflichen Gymnasiums durch entsprechende Kennzeichnungen unterschieden. Sofern keine Kennzeichnung vorhanden ist, gelten die Ausführungen für alle Fachrichtungen.
Folgende Abkürzungen werden verwendet:

BG GuS:	Berufliches Gymnasium Gesundheit und Soziales
BG T:	Berufliches Gymnasium Technik
BG W:	Berufliches Gymnasium Wirtschaft

Lernbereiche gA

<table>
<tr><th>Lernbereich: Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen (BG GuS, BG T, BG W) und einfachen gebrochen-rationalen Funktionen (BG GuS, BG W)</th><th>gA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Intentionen
Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen
• Trassierung (Straßen-, Schienenplanung, konstruktive Formgebung) (BG T)
• Kostentheorie (BG GuS, BG W)
• Angebot und Nachfrage (BG GuS, BG W)
• Produktlebenszyklus (BG GuS, BG W)
• Minimalkostenkombination (BG GuS, BG W)
und den damit verbundenen Eigenschaften sowie Eigenschaften des Graphen einer Funktion werden Bedingungen für den Term einer Funktion formuliert. Dabei wird ein geeigneter Grad einer ganzrationalen Funktion bzw. eine geeignete Darstellung einer gebrochen-rationalen Funktion (BG GuS, BG W) ausgewählt und ihr Term ermittelt.
Die Fragestellungen zur Kurvenanpassung führen häufig auf lineare Gleichungssysteme. Die Behandlung eines algorithmisierbaren Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme bietet die Möglichkeit der Vernetzung mit dem Lernbereich „Raumanschauung und Koordinatisierung“ und „Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung (BG GuS, BG W)“.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kern
▪ zu vorgegebenen Eigenschaften in Anwendungs- und Berufssituationen Bedingungen für den Term einer Funktion formulieren
▪ vorgegebene lokale und globale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen
▪ ein algorithmisierbares Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und anwenden
▪ Funktionsterme anhand von Bedingungen ermitteln
▪ Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durchführen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fakultative Erweiterungen:
Vergleich mit durch Regression gewonnenen Funktionen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:
Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="2">Online-Material:
Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen (gA BG)</td></tr>
</table>

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung	**gA**

Intentionen

Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen

- Beschleunigung-Geschwindigkeit-Weg (BG T)
- mechanische- und Volumenarbeit (BG T)
- Zahlungsströme (BG GuS, BG W)
- Grenzkosten (BG GuS, BG W)
- Konsumenten- und Produzentenrente (BG GuS, BG W)
- Produktlebenszyklus, Gesamtabsatz und Gesamtumsatz (BG GuS, BG W)

werden eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt und die Erfahrungen mit Grenzprozessen erweitert.

Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.

Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ mit $F' = f$ formuliert.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Stammfunktionen werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln überprüft und in einfachen Fällen entwickelt.

Die gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Anwendungs- und Berufssituationen zu lösen. Dabei ermöglicht das digitale Mathematikwerkzeug auch die Betrachtung komplexerer Funktionen.

Kern

- Bestimmtes Integral
  - Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren
  - das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben
  - den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen
  - bestimmte Integrale berechnen
  - bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand
  - Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen
  - Konsumenten- und Produzentenrente, Gesamtabsatz, Gesamtumsatz, Gesamtgewinn, Gesamtkosten berechnen (BG GuS, BG W)
- Stammfunktion
  - Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen
  - Stammfunktionen zu Funktionen f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ angeben
  - Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln

Fakultative Erweiterungen:

Integralfunktion, Bogenlänge (BG T)

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung (gA)

Lernbereich: Die e-Funktion	gA

Intentionen

Ausgehend von Beispielen zu exponentiellen Wachstumsprozessen

- Bevölkerungswachstum
- radioaktiver Zerfall, Energiespeicher (BG T)
- Abkühlungsprozesse (BG T)
- Produktlebenszyklus (BG GuS, BG W)
- Medikamentendosierungen und -abbau (BG GuS, BG W)

werden die Exponentialfunktionen wieder aufgegriffen. Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen mithilfe der Wachstumsgeschwindigkeit wird die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert. Es werden das exponentielle und das begrenzte Wachstum thematisiert und voneinander abgegrenzt.

Die Exponentialfunktion zur Basis e wird durch die Eigenschaft beschrieben, dass sie mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist. Exponentialterme mit beliebigen Basen werden in Terme zur Basis e umgeformt sowie abgleitet.

Die Verkettung mit linearen Funktionen wird definiert und die Kettenregel bei linearer innerer Funktion als neue Ableitungsregel eingeführt. Zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen zur Basis e wird der ln als Umkehroperation verwendet.

Die additive und multiplikative Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen wird eingeführt und an ausgewählten technisch (Newtonsches Abkühlungsgesetz, BG T) bzw. ökonomisch (Produktlebenszyklus, BG GuS, BG W) relevanten Beispielen untersucht. Die zur Ableitung notwendige Produktregel wird eingeführt.

Zur Angleichung an Daten werden Parameter durch Einsetzen konkreter Werte bestimmt.

Das asymptotische Verhalten wird als eine besondere Eigenschaft beschrieben und am Beispiel des begrenzten Wachstums thematisiert.

Bei der Bearbeitung von Problemen mit verknüpften Funktionen und mit linear verketteten Funktionen müssen auch angemessene Verfahren zum Lösen entsprechender Gleichungen thematisiert werden.

Kern

- die Wachstumsgeschwindigkeit bei exponentiellem Wachstum als proportional zum Bestand beschreiben
- die Basis e durch $(e^x)' = e^x$ charakterisieren
- die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x) = a^x$ verwenden
- in einfachen Fällen additive und multiplikative Verknüpfungen mit ganzrationalen Funktionen beschreiben, untersuchen und in Anwendungssituationen anwenden
- Verkettung mit linearen Funktionen beschreiben, untersuchen und in Sachproblemen anwenden
- Produktregel und Kettenregel bei linearer innerer Funktion anwenden
- Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durchführen
- Exponentialgleichungen lösen
- asymptotisches Verhalten des begrenzten Wachstums beschreiben

Fakultative Erweiterungen:

ln als Funktion, logistisches Wachstum

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Die e-Funktion (gA)

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung	gA

Intentionen

Ausgehend von Orientierungsproblemen im Raum aus den Bereichen

- Konstruktion geradlinig und ebenflächig begrenzter Baukörper (BG T)
- Gradlinige Bewegungen im Raum (Flug- und Maschinenbewegungen) (BG T)
- Spielgeräte (Aufbau, Konstruktion) (BG GuS , BG W)

werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinander-setzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.

Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum. Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.

Kern

- Raumanschauung und Koordinatisierung
  - Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben
  - die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen
  - Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen
  - Kollinearität zweier Vektoren überprüfen
  - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden (BG T)

- Maße und Lagen
  - Abstände zwischen Punkten bestimmen
  - Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden
  - Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen
  - Winkelgrößen zwischen Strecken und Geraden bestimmen
  - Lagebeziehungen von Geraden untersuchen und Schnittpunkte bestimmen (BG T)

Fakultative Erweiterungen:

Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen; Ebenengleichungen in Normalenform (BG T)

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form

Online-Material:

Raumanschauung und Koordinatisierung (gA, BG)

Lernbereich: Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung (BG GuS, BG W)	**gA**

Intentionen

Ausgehend von Fragen aus dem Bereich der Materialverflechtung werden mehrstufige Prozesse durch Darstellung in Matrizenform und mit Tupeln strukturiert. In diesem Zusammenhang werden die unterschiedlichen Arten von Matrizen und die Rechengesetze für Matrizen einschließlich inverser Matrizen behandelt.

Materialverflechtungen sowie Verflechtungen innerhalb einer Volkswirtschaft bzw. innerhalb eines Unternehmens werden durch geeignete Verflechtungsdiagramme dargestellt.

Kern

- Matrizenoperationen
  - ökonomisch relevante Sachverhalte mit Tupeln und Matrizen beschreiben
  - Matrizenaddition, Matrizenmultiplikation und inverse Matrizen nutzen
  - mehrstufige Materialverflechtung verwenden
  - Leontief-Modell verwenden
- Darstellungen
  - Verflechtungsdiagramme zur strukturierten Darstellung nutzen

Fakultative Erweiterungen:

Direktbedarfsmatrizen; Lineare Optimierung

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl

Online-Material:

Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung (gA, BG GuS, BG W)

Lernbereich: Daten und Zufall	gA

Intentionen

Ausgehend von Zufallsexperimenten aus den Bereichen

- Qualitätskontrolle
- Buchungspraxis, Auslastung von Maschinen
- Messtechnik (BG T)

werden die Kenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert.

Beim Umgang mit den Einträgen in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Hierbei wird insbesondere zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterschieden. Der Vergleich zwischen dem Ziehen ohne Zurücklegen und dem Ziehen mit Zurücklegen fördert das Verständnis für die stochastische Unabhängigkeit.

Häufigkeitsverteilungen vorliegender Daten lassen sich durch diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellieren, um – durch Simulation oder durch Rechnung – Prognosen zu gewinnen. Dabei wird die zugehörige Zufallsgröße angegeben. Die bekannten Kenngrößen für empirisch gewonnene Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf das jeweilige theoretische Modell der Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen und führen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung.

Exemplarisch für Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Binomialverteilungen und deren grafische Darstellungen erkundet. Mithilfe von Simulationen werden stochastische Anwendungs- und Berufssituationen betrachtet, die näherungsweise auf die Binomialverteilung führen.

Mithilfe der Binomialverteilung lassen sich (auch durch Simulation) Prognoseintervalle über Stichproben gewinnen, die bei vorliegender Grundgesamtheit zu erwarten sind. Umgekehrt lässt sich durch Rechnersimulationen ermitteln, ob ein vermuteter Anteil der Grundgesamtheit bzw. eine vermutete Wahrscheinlichkeit mit einer vorliegenden Stichprobe verträglich ist.

Kern

- Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
  - Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
  - Teilvorgänge bei mehrstufigen Zufallsexperimenten auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen
  - Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
  - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
  - ökonomische Prozesse mithilfe des Erwartungswertes beurteilen
- Binomialverteilung
  - Eignung des Modells beurteilen
  - Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
  - Zufallsgröße sowie Parameter n und p der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
  - die Bedeutung der Faktoren im Term $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ erläutern
  - Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
  - die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
  - die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
  - Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
  - beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters p mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist
  - Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden

Fakultative Erweiterungen: ---
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Messen; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall
Online-Material: Daten und Zufall (gA BG)

Lernbereiche eA

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung	eA

Intentionen

Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen

- Beschleunigung-Geschwindigkeit-Weg (BG T)
- Biegelinien (BG T)
- mechanische- und Volumenarbeit (BG T)
- Zahlungsströme (BG GuS, BG W)
- Grenzkosten (BG GuS, BG W)
- Konsumenten- und Produzentenrente (BG GuS, BG W)
- Produktlebenszyklus, Gesamtabsatz und Gesamtumsatz (BG GuS, BG W)

werden eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt und die Erfahrungen mit Grenzprozessen erweitert.

Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.

Die funktionale Beschreibung von Integralen führt zur Integralfunktion, die als Bestandsfunktion und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhaltsfunktion interpretiert werden kann. Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Stammfunktionen werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln überprüft und in einfachen Fällen entwickelt.

Die gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Sachprobleme zu lösen. Dabei ermöglicht das digitale Mathematikwerkzeug auch die Betrachtung komplexerer Funktionen.

Das Verständnis des Integralbegriffs wird durch die Herleitung der Volumenformel eines Rotationskörpers und die Bestimmung uneigentlicher Integrale erweitert.

Kern

- Bestimmtes Integral
  - Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren
  - das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben
  - den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen
  - bestimmte Integrale berechnen
  - bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierter Bestand
  - Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen
  - Konsumenten- und Produzentenrente, Gesamtabsatz, Gesamtumsatz, Gesamtgewinn, Gesamtkosten berechnen (BG GuS, BG W)

- Integral- und Stammfunktion
  - Integralfunktionen auch als Bestands- oder Flächeninhaltsfunktion interpretieren
  - Integral- und Stammfunktion unterscheiden
  - Stammfunktionen zu Funktionen f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ angeben
  - die ln-Funktion als eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x};\ x > 0$ verwenden
  - Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln
  - Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen

- Vertiefungen
  - Volumenformel für Körper, die durch Rotation eines Graphen um die x-Achse entstehen, herleiten und anwenden
  - uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten interpretieren und bestimmen

Fakultative Erweiterungen:

Rotation um die y-Achse; Mittelwerte

Mantelfläche; Bogenlänge; Schwerpunkte (BG T)

Konsumentenrente und Teilmarktbildung, Gini-Koeffizient (BG GuS, BG W)

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung (eA)

Lernbereich: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion	eA

Intentionen

Ausgehend von Beispielen zu exponentiellen Wachstumsprozessen

- Bevölkerungswachstum, stetige Verzinsung
- radioaktiver Zerfall, Energiespeicher (BG T)
- Newtonsches Abkühlungsgesetz (BG T)
- Produktlebenszyklus (BG GuS, BG W)
- Medikamentendosierungen und -abbau (BG GuS, BG W)

werden die bereits bekannten Wachstumsmodelle um das des logistischen Wachstums ergänzt. Die verschiedenen Wachstumsmodelle werden verglichen und im Sachzusammenhang interpretiert. Zur Angleichung an Daten werden Parameter durch Einsetzen konkreter Werte bestimmt.

Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen mithilfe der Wachstumsgeschwindigkeit wird die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert.

Die Exponentialfunktion zur Basis e wird durch die Eigenschaft beschrieben, dass sie mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist, was auch durch die Differentialgleichung $f' = f$ beschrieben wird. Die Verkettung mit ganzrationalen Funktionen wird definiert und die Kettenregel als neue Ableitungsregel eingeführt. Die Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen wird eingeführt und, ebenso wie die Verkettung, an ausgewählten Beispielen hinsichtlich charakteristischer Merkmale untersucht und so zur Lösung von Problemen mit Anwendungs- und Berufsbezügen genutzt. Dabei wird auch die Produktregel eingeführt.

Zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen zur Basis e wird der ln als Umkehroperation verwendet und die ln-Funktion wird als Stammfunktion für f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ angegeben.

Bei der Bearbeitung von Problemen mit verketteten und mit verknüpften Funktionen müssen auch Verfahren zum Lösen entsprechender Gleichungen und Gleichungssysteme thematisiert werden.

Das asymptotische Verhalten der Graphen von Exponentialfunktionen wird als eine besondere Eigenschaft beschrieben. Dabei werden die Vorstellungen von Grenzprozessen vertieft.

Bei der exponentiellen, begrenzten und logistischen Modellierung von Wachstumsvorgängen werden die Zusammenhänge zwischen Änderungsrate und Bestand durch Differentialgleichungen beschrieben, die auch zur Klassifizierung nach Wachstumsarten verwendet werden können. Funktionen werden durch Einsetzen in die Differentialgleichung auf ihre Eignung als Lösungsfunktion überprüft.

Kern

- Untersuchung von Wachstumsprozessen
  - begrenztes und logistisches Wachstum beschreiben, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen
  - verschiedene Wachstumsmodelle vergleichen
  - asymptotisches Verhalten im Anwendungszusammenhang beschreiben
  - Modelle mithilfe zugehöriger Differentialgleichungen beschreiben und mögliche Lösungsfunktionen überprüfen
- e-Funktion
  - die Basis e durch $(e^x)' = e^x$ charakterisieren
  - die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x) = a^x$ verwenden
  - Verkettung und Verknüpfung mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Anwendungssituationen beschreiben und untersuchen
  - asymptotisches Verhalten bei additiver Verknüpfung linearer Funktionen mit e-Funktionen beschreiben
  - Exponentialgleichungen lösen
  - Produkt- und Kettenregel anwenden
  - Scharparameter, auch zur Angleichung an Daten, ermitteln
  - Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen durch Einsetzen überprüfen

Fakultative Erweiterungen: Quotientenregel, Ortslinien
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang
Online-Material: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion (eA)

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung	eA

Intentionen

Ausgehend von Orientierungsproblemen im Raum aus den Bereichen

- Konstruktion geradlinig und ebenflächig begrenzter Baukörper (BG T)
- Gradlinige Bewegungen im Raum (Flug- und Maschinenbewegungen) (BG T)
- Spielgeräte (Aufbau, Konstruktion) (BG GuS, BG W)

werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.

Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum.

Streckungen, Spiegelungen und Drehungen um die Koordinatenachsen im Raum sowie die Projektion vom Raum in die Ebene werden mit Matrizen beschrieben (BG T).

Unterschiedliche Darstellungsformen von Geraden- und Ebenengleichungen ermöglichen eine flexible Untersuchung von Lagebeziehungen. Deshalb ist unter Umständen der Wechsel zwischen Darstellungsformen notwendig (BG T).

Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt (BG T) und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.

Kern

- Raumanschauung und Koordinatisierung
  - Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben
  - die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen
  - Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen
  - Kollinearität zweier Vektoren überprüfen
  - Streckungen, Spiegelungen und Drehungen um die Koordinatenachsen im Raum, sowie die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen beschreiben und nutzen (BG T)
  - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden (BG T)
  - Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform verwenden (BG T)
  - zwischen den Darstellungsformen wechseln (BG T)

- Maße und Lagen
  - Abstände zwischen Punkten bestimmen
  - Abstände zwischen Geraden und Ebenen bestimmen (BG T)
  - Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden
  - Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen
  - Winkelgrößen bestimmen
  - Vektorprodukt geometrisch deuten und verwenden (BG T)
  - Lagebeziehungen von Geraden, Geraden und Ebenen sowie von Ebenen untersuchen und Schnittprobleme lösen (BG T)
  - den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und in geeigneten Fällen anwenden

Fakultative Erweiterungen:

Spatprodukt, Raumkurven in Parameterform, Kreis- und Kugelgleichung (BG T)

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form

Online-Material:

Raumanschauung und Koordinatisierung (eA, BG)

Lernbereich: Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung (BG GuS, BG W)	eA

Intentionen

Ausgehend von Fragen aus dem Bereich der Materialverflechtung werden mehrstufige Prozesse durch Darstellung in Matrizenform und mit Tupeln strukturiert. In diesem Zusammenhang werden die unterschiedlichen Arten von Matrizen und die Rechengesetze für Matrizen einschließlich inverser Matrizen behandelt.

Materialverflechtungen sowie Verflechtungen innerhalb einer Volkswirtschaft bzw. innerhalb eines Unternehmens werden durch geeignete Verflechtungsdiagramme dargestellt.

Die Behandlung von Problemen zum Käufer- und Wahlverhalten eröffnen eine weitere Sichtweise auf Matrizen, indem sich wiederholende Prozesse hinsichtlich einer Langzeitprognose analysiert werden. In diesem Zusammenhang werden auch die Begriffe Grenzmatrix und Fixvektor thematisiert.

Kern

- Matrizenoperationen
  - Sachverhalte mit Tupeln und Matrizen beschreiben
  - Matrizenaddition, Matrizenmultiplikation und inverse Matrizen nutzen
  - Mehrstufige Materialverflechtung verwenden
  - Potenzen von Matrizen nutzen
  - Leontief-Modell verwenden
  - Grenzmatrix und Fixvektor interpretieren
- Darstellungen
  - Verflechtungsdiagramme und Übergangsgraphen zur strukturierten Darstellung nutzen

Fakultative Erweiterungen:

Direktbedarfsmatrizen; lineare Optimierung

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl

Online-Material:

Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung (eA, BG GuS, BG W)

Lernbereich: Kurvenanpassung und Funktionsscharen	eA

Intentionen

Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen

- Trassierung (Straßen-, Schienenplanung, konstruktive Formgebung) (BG T)
- Kostentheorie (BG GuS, BG W)
- Minimalkostenkombination (BG GuS, BG W)
- Angebot und Nachfrage, Elastizität (BG GuS, BG W)

und den damit verbundenen Eigenschaften werden Bedingungen an eine Modellfunktion formuliert. Passend zu diesen Bedingungen werden ein geeigneter Funktionstyp ausgewählt und Funktionsgleichungen bestimmt. Umgekehrt werden anhand gegebener Funktionsterme neuer Vertreter bekannter Funktionstypen die bekannten Eigenschaften zur Beschreibung verwendet.

Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen.

Bei Modellierungen mit abschnittsweise definierten Funktionen sind darüber hinaus an den Übergängen Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit als Bedingungen zu nutzen und in Anwendungssituationen zu interpretieren. Die Zugänge zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden anschauungsgeleitet gefunden. (BG T)

Von einem Parameter abhängige ganzrationale Funktionen oder Funktionen, die durch Verknüpfung und Verkettung von ganzrationalen mit e-Funktionen entstehen, werden jeweils zu einer Funktionenschar zusammengefasst. Die Funktionen solcher Scharen werden hinsichtlich ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede klassifiziert.

Fragestellungen in diesem Lernbereich führen häufig auf lineare Gleichungssysteme. Dies bietet die Möglichkeit der Vernetzung mit dem Lernbereich „Raumanschauung und Koordinatisierung“.

Kern

- Kurvenanpassung
  - Funktionen nach globalen Eigenschaften wie Symmetrie, Verhalten für $|x| \to \infty$, asymptotisches Verhalten bzw. Periodizität (BG T) klassifizieren
  - bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten Funktionsterms nutzen
  - vorgegebene lokale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen und diesen ermitteln
  - Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen nutzen (BG T)
- Funktionenscharen
  - Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Parameter benennen und begründen
  - Variationen des Parameters zur Anpassung an vorgegebene Eigenschaften durchführen

Fakultative Erweiterungen:

Ortslinien, Splines (BG T)

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Kurvenanpassung und Funktionsscharen (eA)

Lernbereich: Daten und Zufall	eA

Intentionen

Ausgehend von Zufallsexperimenten aus den Bereichen

- Qualitätskontrolle
- Buchungspraxis, Maschinenauslastung
- Messwerte (BG T)

werden die Kenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert.

Beim Umgang mit den Einträgen in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Hierbei wird insbesondere zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterschieden. Der Vergleich zwischen dem Ziehen ohne Zurücklegen und dem Ziehen mit Zurücklegen fördert das Verständnis für die stochastische Unabhängigkeit.

Häufigkeitsverteilungen vorliegender Daten lassen sich durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellieren, etwa um – durch Simulation und durch Rechnung – Prognosen zu gewinnen. Dabei wird die zugehörige Zufallsgröße angegeben. Die bekannten Kenngrößen für empirisch gewonnene Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf das jeweilige theoretische Modell der Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen und führen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung.

Es werden diskrete von stetigen Zufallsgrößen abgegrenzt.

Exemplarisch für Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden die Binomial- und Normalverteilung und deren grafische Darstellungen für verschiedene Parameter erkundet. Die Normalverteilung wird als ein Beispiel für eine stetige Verteilung und in geeigneten Fällen als Approximation der Binomialverteilung verwendet. Mithilfe von Simulationen werden stochastische Anwendungs- und Berufssituationen betrachtet, die näherungsweise auf die Binomial- bzw. die Normalverteilung führen.

Prognose- und Konfidenzintervalle lassen sich durch Variation der Parameter ermitteln und mithilfe der Normalverteilung auch berechnen. Sie stellen Näherungen für die entsprechenden Intervalle der Binomialverteilung dar. Simulationen fördern das Verständnis hinsichtlich Unsicherheit und Genauigkeit der Konfidenzintervalle.

Kern

- Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
  - Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
  - Zusammenhang zwischen Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten herstellen
  - Kausale und stochastische Unabhängigkeit voneinander abgrenzen
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen
  - Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
  - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
  - ausgeglichene ökonomische Prozesse mithilfe des Erwartungswertes beurteilen
- Binomialverteilung
  - Eignung des Modells beurteilen
  - Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
  - Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
  - Zufallsgröße sowie Parameter n und p der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
  - die Bedeutung der Faktoren im Term $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ erläutern
  - Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
  - die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
  - die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
  - Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
  - beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters p mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist

▪ die Binomialverteilung als näherungsweises Modell für weitere stochastische Situationen verwenden • Normalverteilung ▪ Diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden ▪ Notwendigkeit von Histogrammen erläutern ▪ Parameter der Normalverteilung erläutern und in Sachkontexten nutzen • Binomial- und Normalverteilung ▪ Angemessenheit der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung beurteilen ▪ Prognoseintervalle auch mithilfe von σ-Umgebungen für Anteile berechnen und interpretieren ▪ Konfidenzintervalle für den Parameter p der Binomialverteilung ermitteln und interpretieren ▪ die Intervallgrenzen von Konfidenzintervallen als zufällige Größen erläutern ▪ die Sicherheitswahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit deuten, mit der die Konfidenzintervalle bei Verwendung der Normalverteilung den wahren Wert überdecken ▪ exemplarisch stochastische Situationen simulieren, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen, um Näherungslösungen in komplexeren Situationen zu erhalten
Fakultative Erweiterungen: andere Verteilungen
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Messen; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall
Online-Material: Daten und Zufall (eA BG)

4 Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung

Leistungsfeststellungen und Leistungsbewertungen geben den Schülerinnen und Schülern und deren Erziehungsberechtigten Rückmeldungen über den Erwerb der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen. Den Lehrkräften geben sie Orientierung für die weitere Planung des Unterrichts sowie für notwendige Maßnahmen zur individuellen Förderung.

Grundsätzlich ist zwischen Lern- und Leistungssituationen zu unterscheiden. In Lernsituationen ist das Ziel der Kompetenzerwerb. Fehler und Umwege dienen den Schülerinnen und Schülern als Erkenntnismittel, den Lehrkräften geben sie Hinweise für die weitere Unterrichtsplanung. Das Erkennen von Fehlern und der produktive Umgang mit ihnen sind konstruktiver Teil des Lernprozesses. Für den weiteren Lernfortschritt ist es wichtig, bereits erworbene Kompetenzen herauszustellen und Schülerinnen und Schüler zum Weiterlernen zu ermutigen. Dies schließt die Förderung der Fähigkeit zur Selbsteinschätzung der Leistung ein.

Ein an Kompetenzerwerb orientierter Unterricht bietet den Schülerinnen und Schülern durch geeignete Aufgaben einerseits ausreichend Gelegenheiten, Problemlösungen zu erproben, andererseits fordert er den Kompetenznachweis in anspruchsvollen Leistungssituationen ein. Leistungssituationen sollen die Verfügbarkeit der erwarteten Kompetenzen nachweisen.

Für eine transparente Leistungsbewertung sind den Lernenden die Beurteilungskriterien rechtzeitig mitzuteilen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nicht nur die Quantität, sondern auch die Qualität der Beiträge für die Beurteilung maßgeblich ist. Die Schülerinnen und Schüler weisen ihren Kompetenzerwerb durch schriftliche Arbeiten (Klausuren) und durch sonstige Leistungen nach. Ausgehend von der kontinuierlichen Beobachtung der Schülerinnen und Schüler im Lernprozess und ihrer persönlichen Lernfortschritte sind die Ergebnisse der Klausuren und die sonstigen Leistungen zur Leistungsfeststellung heranzuziehen. Im Laufe des Schulhalbjahres sind die Lernenden mehrfach über ihren aktuellen Leistungsstand zu informieren.

Zu sonstigen Leistungen (und andere fachspezifische Leistungen) zählen z. B.:

- sachbezogene und kooperative Teilnahme am Unterrichtsgespräch,
- Erheben relevanter Daten (z. B. Informationen sichten, gliedern und bewerten, in unterschiedlichen Quellen recherchieren),
- Ergebnisse von Partner- oder Gruppenarbeiten und deren Darstellung,
- Unterrichtsdokumentationen (z. B. Protokolle, Arbeitsmappen, Materialdossiers, Portfolios, Wandzeitungen),
- Präsentationen, auch mediengestützt,
- verantwortungsvolle Zusammenarbeit im Team (z. B. kommunizieren, informieren, planen, strukturieren, kontrollieren, reflektieren, präsentieren),
- Umgang mit Medien und anderen fachspezifischen Hilfsmitteln,
- Anwenden und Ausführen fachspezifischer Methoden und Arbeitsweisen,
- Anfertigen von schriftlichen Ausarbeitungen,
- mündliche Überprüfungen und kurze schriftliche Lernkontrollen,

- häusliche Vor- und Nachbereitung,[3]
- freie Leistungsvergleiche (z. B. Teilnahme an Schülerwettbewerben).

Bei kooperativen Arbeitsformen sind sowohl die individuelle Leistung als auch die Gesamtleistung der Gruppe in die Bewertung einzubeziehen. So finden neben methodisch-strategischen auch sozial-kommunikative Leistungen Berücksichtigung.
Art und Inhalt der Aufgabenstellungen in den Klausuren sollen dem unterrichtlichen Vorgehen entsprechen und die Vielfalt der im Unterricht erworbenen Kompetenzen widerspiegeln. Insbesondere sollte bei der Klausurkonzeption berücksichtigt werden, dass auch Aufgaben angeboten werden, die, wie in der zentralen Prüfung, ohne den Einsatz von Hilfsmitteln zu bearbeiten sind.
Bei allen Aufgaben muss aus der Aufgabenstellung der Umfang der erwarteten Bearbeitung für die Schülerinnen und Schüler verständlich und klar erkennbar sein. Diese Klarheit bezüglich des Bearbeitungsumfangs wird auch mithilfe der für die zentralen Prüfungsaufgaben formulierten Operatoren erreicht (siehe Anhang), die im Unterricht eingeführt und in schriftlichen Arbeiten verwendet werden.
Die Aufgaben sind so zu gestalten, dass eine unabhängige Bearbeitung der Teilaufgaben möglich ist. Falls erforderlich können in der Aufgabenstellung Zwischenergebnisse angegeben werden.
Bei jeder Klausur liegt der Schwerpunkt der geforderten Leistungen im Anforderungsbereich II. Darüber hinaus sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen. In Kursen auf grundlegendem Anforderungsniveau sind die Anforderungsbereiche I und II, in Kursen auf erhöhtem Anforderungsniveau die Anforderungsbereiche II und III stärker zu akzentuieren.
Für die Bewertung von Klausuren sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Klausur. Dies gilt insbesondere beim Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge. Rechnerbefehle können Darstellungen in der mathematischen Fachsprache nicht ersetzen, allenfalls ergänzen und erläutern. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, fehlende fachsprachlich formulierte Ansätze, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten.
In der Qualifikationsphase werden die Schülerinnen und Schüler an das in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife" formulierte Niveau und an die Struktur der Abiturprüfung herangeführt.[4]
Zur Ermittlung der Gesamtzensur sind die Ergebnisse der Klausuren und die Bewertung der sonstigen Leistungen heranzuziehen. Der Anteil der schriftlichen Arbeiten (Klausuren) darf ein Drittel an der Gesamtzensur nicht unterschreiten und 50% nicht überschreiten.

[3] Näheres hierzu regelt der Erlass *Hausaufgaben an allgemein bildenden Schulen* (RdErl d. MK v. 22.3.2012 – VORIS 22410) in seiner jeweils gültigen Fassung.
[4] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) 3., S. 27ff

5 Aufgaben der Fachkonferenz

Die Fachkonferenz erarbeitet unter Beachtung der rechtlichen Grundlagen und der fachbezogenen Vorgaben des Kerncurriculums ein schuleigenes Fachcurriculum, das regelmäßig, auch vor dem Hintergrund interner und externer Evaluation, zu überprüfen und weiterzuentwickeln ist. Die Fachkonferenz trägt somit zur Qualitätsentwicklung und -sicherung des Faches bei.

Die Fachkonferenz

- stimmt die schuleigenen Arbeitspläne der Einführungsphase auf die Arbeitspläne der abgebenden Schulform ab,
- erarbeitet Unterrichtseinheiten zu Lernbereichen, die den Erwerb der erwarteten Kompetenzen ermöglichen,
- legt die Themen der Schulhalbjahre fest,
- entscheidet, welches Schulbuch eingeführt werden soll, und trifft Absprachen über geeignete Materialien und Medien, die den Aufbau der Kompetenzen fördern,
- trifft Absprachen zur einheitlichen Verwendung der Fachsprache,
- trifft Absprachen zum Erwerb hilfsmittelfreier Fertigkeiten, zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und fachbezogener Hilfsmittel,
- entwickelt ein fachbezogenes Konzept zum Einsatz von Medien,
- berät über individuelle Förderkonzepte und Maßnahmen zur Binnendifferenzierung,
- wirkt mit bei der Entwicklung des Förderkonzepts der Schule und stimmt die erforderlichen Maßnahmen zur Umsetzung ab,
- trifft Absprachen zur Konzeption von schriftlichen, mündlichen und anderen fachspezifischen Lernkontrollen und ihrer Bewertung,
- bestimmt das Verhältnis von schriftlichen, mündlichen und anderen fachspezifischen Leistungen bei der Festlegung der Gesamtbewertung,
- initiiert und fördert Anliegen des Faches bei schulischen und außerschulischen Aktivitäten (z. B. Nutzung außerschulischer Lernorte, Besichtigungen, Projekte, Teilnahme an Wettbewerben),
- entwickelt ein Fortbildungskonzept für die Fachlehrkräfte und informiert sich über Fortbildungsergebnisse,
- wirkt mit an Konzepten zur Unterstützung von Schülerinnen und Schülern beim Übergang in Beruf und Hochschule.

Anhang

A1 Operatoren

Für zentrale Prüfungsaufgaben müssen Vereinbarungen hinsichtlich der Formulierung von Arbeitsaufträgen und der erwarteten Leistung getroffen werden. Operatoren, die für das Fach Mathematik besondere Bedeutung haben, werden in der unten stehenden Tabelle beschrieben und ggf. kommentiert. Diese Operatoren werden im Unterricht eingeführt und in schriftlichen Arbeiten verwendet.

Dabei ist zu beachten:

- Eine Vorgabe zur Verwendung eines bestimmten Hilfsmittels erfolgt in der Regel nicht.
- Durch Zusätze sind Einschränkungen oder weitere Vorgaben möglich (Bestimmen Sie grafisch, …). Im Einzelfall kann die Darstellung eines Lösungsweges gefordert werden, der auch ohne den Einsatz eines digitalen Mathematikwerkzeugs nachvollziehbar ist.
- Zusammensetzungen aus mehreren Operatoren („Beschreiben Sie … und begründen Sie …"; „Vergleichen und bewerten Sie …") sind möglich.
- Die Verwendung weiterer Operatoren ist möglich, wenn sich der notwendige Bearbeitungsumfang deutlich aus dem Kontext oder einer ausführlicheren Beschreibung ergibt.

Operator	Beschreibung der erwarteten Leistung	Anmerkungen
Begründen	Je nach Kontext – einen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – die Angemessenheit einer Verfahrensweise bzw. die Eignung der Werkzeuge darlegen Hierzu gehört eine inhaltliche Betrachtung.	Auch bei der Verwendung mathematischer Syntax ist eine geschlossene Antwort erforderlich, die auch Textanteile enthält. Die Angabe einer Formel o. ä. genügt hier nicht. Aufgrund der verschiedenen Ausprägungen des Operators „Begründen" ergeben sich Überschneidungen mit „Beweisen" und „Zeigen", wobei dort formale bzw. rechnerische Aspekte eine höhere Bedeutung haben.
Berechnen	Ergebnisse von einem ausformulierten mathematischen Ansatz ausgehend durch explizite oder näherungsweise Berechnung gewinnen	
Beschreiben	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben	Vgl. Erläutern
Bestimmen / Ermitteln	Einen möglichen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren	Alle Werkzeugebenen sind zulässig. Einschränkungen s. o.
Beurteilen	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Vgl. Entscheiden

Operator	Beschreibung der erwarteten Leistung	Anmerkungen
Beweisen / Widerlegen	Einen Nachweis im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen durchführen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	
Entscheiden	Bei verschiedenen Möglichkeiten sich begründet und eindeutig festlegen	Vgl. Beurteilen Bei diesem Operator steht die eindeutige, begründete Festlegung aufgrund eines Vergleiches im Vordergrund.
Erläutern	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben und durch zusätzliche Informationen oder Darstellungsformen verständlich machen	Vgl. Beschreiben Im Unterschied zur Beschreibung erfordert eine Erläuterung die Darstellung inhaltlicher Bezüge.
Herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen heraus nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes darlegen	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden. Einschränkungen s. o.
Interpretieren	Mathematische Objekte – als Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem, – umdeuten in eine andere mathematische Sichtweise	
Klassifizieren	Eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen	Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird gesondert gefordert.
Nennen / Angeben	Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne Erläuterungen aufzählen	
Skizzieren	Objekte oder Funktionen auf das Wesentliche reduziert grafisch übersichtlich darstellen	Skizzieren wird immer im Kontext mit grafischen Darstellungen verwendet.
Untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten herausfinden und darlegen	Je nach Sachverhalt kann zum Beispiel ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein.
Vergleichen	Sachverhalte, Objekte oder Verfahren gegenüberstellen, ggf. Vergleichskriterien festlegen, Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede feststellen	Eine Bewertung wird gesondert gefordert.
Zeichnen / Grafisch darstellen	Eine grafische Darstellung anfertigen, die auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte hinreichend exakt ist bzw. Sachverhalte angemessen wiedergibt	
Zeigen / Nachweisen	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, mit Berechnungen oder logischen Begründungen bestätigen	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden. Einschränkungen s. o.